



Uma Representação Kotel'nikov para Wavelets e Bancos de Filtros sem Superposição Espectral

H. M. de Oliveira¹, R. J. Cintra¹, R. C. de Oliveira²

¹ Universidade Federal de Pernambuco, ² Universidade Estadual do Amazonas

Resumo—

- representação para wavelets usando sinais em banda básica, Kotel'nikov.
- obtenção dos processos de envoltória e de fase em baixa frequência.
- wavelets de suporte espectral limitado em $[f_m, f_M] \Rightarrow$ análise ortogonal provido que $f_M \leq 3f_m$.
- wavelets ortogonais \Rightarrow banco de filtros “equivalente” sem superposição espectral.



INTRODUÇÃO

Wavelets e a análise de multirresolução de Mallat já se tornaram ferramentas consagradas na análise de sinais (processamento mais eficiente).

Em sistemas de comunicação e modelos de ruído a representação mais utilizada: *representação passa-banda*, envolvendo sinal em banda básica modulado.

A condição de admissibilidade de wavelets, $\psi(t) \leftrightarrow \Psi(w)$, impõe um zero na origem do espectro, i.e., $\Psi(0)=0$, estes sinais são reconhecidamente passa-faixa.

Como aplicar as representações passa-faixa usuais em Telecomunicações para wavelets?

Este é um dos focos deste trabalho. Resgata-se o seguinte teorema por Kotel'nikov.



Teorema (Kotel'nikov, 1933). *Se um sinal $f(t)$ tem um espectro confinado na banda $[w_1, w_2]$, então existe uma representação $f(t) = g(t) \cdot \cos \left[\frac{w_1 + w_2}{2} t + \theta(t) \right]$, sendo $g(t)$ e $\theta(t)$ processos de baixa-frequência, limitados em $\left[0, \frac{w_2 - w_1}{2} \right]$ ■*

Este resultado anterior ao teorema de Shannon.



REPRESENTAÇÃO PASSA-FAIXA PARA WAVELETS

A aplicação direta do Teorema de Kotel'nikov para uma wavelet-mãe de espectro (efetivamente) confinado na faixa $[f_m, f_M]$, resulta:

$$\psi(t) = e(t) \cdot \cos[\pi \cdot (f_M + f_m)t + \theta(t)],$$

sendo $e(t)$ e $\theta(t)$ processos em banda básica, de espectros limitados em $[0, B/2]$, sendo $B := (f_M - f_m)$ a banda passante da wavelet.

Forma alternativa: envelope complexo em banda-básica, modulado por portadora:

$$\psi(t) = \mathcal{Re}\{S_b(t) \cdot e^{j\pi \cdot (f_M + f_m)t}\}.$$

em que $S_b(t) := e(t) \cdot e^{j\theta(t)}$ é um sinal (complexo) em banda-básica.



Como obter os processos componentes $e(t)$ e $\theta(t)$ a partir da forma de onda de $\psi(t)$?

- Optou-se por usar uma detecção síncrona para “demodular” a wavelet.

A frequência de portadora virtual é o ponto central do espectro da wavelet-mãe:

$$w_c := \frac{w_m + w_M}{2} \Rightarrow f_c := \frac{f_m + f_M}{2} \quad (\text{Hz}).$$

A detecção se faz em duas componentes, “*in phase*” e “*in quadrature*”, usando filtros passa-baixa para obter as componentes respectivas.

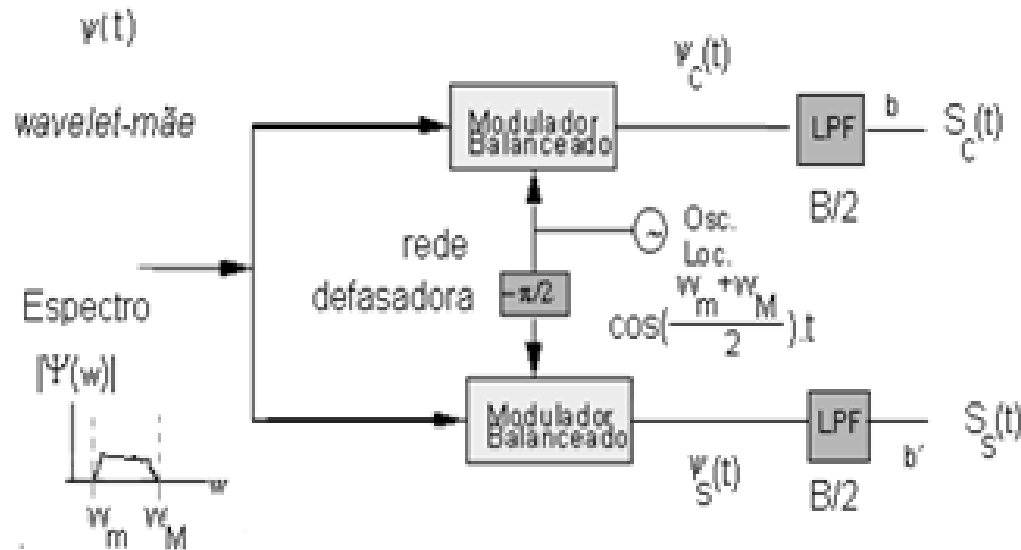


Fig 1. Decomposição de uma wavelet confinada na faixa espectral $[\omega_m, \omega_M]$ em suas componentes de baixa frequência, em fase e em quadratura. O valor de B corresponde à banda da wavelet,

Derivam-se relações similares as “equações clássicas” da teoria de comunicações:

$$e(t) = 2 \cdot \sqrt{s_c^2(t) + s_s^2(t)} \quad e \quad \theta(t) = -tg^{-1} \left(\frac{s_s(t)}{s_c(t)} \right).$$

A envoltória $e(t)$ da representação passa-faixa da wavelet tem uma relação com à *função de escala* associada.

wavelets de Shannon.

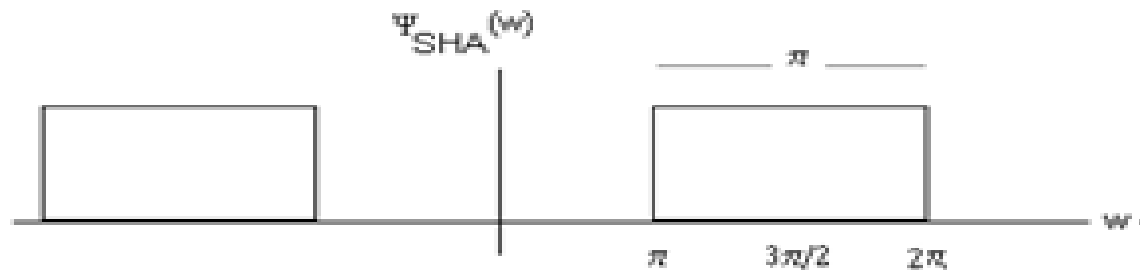


Fig 2. Espectro da wavelet de Shannon: confinamento na faixa $[\pi/2, 5\pi/2]$, com frequência central $\omega_0=3\pi/2$ e banda $2\pi B=\pi$, ou seja, 0.5 Hz.

A representação passa-faixa resulta em

$$s_c(t) = \text{sinc}(t), \text{ em que } \text{sinc}(t) := \frac{\sin(\pi t)}{\pi t},$$

$$s_s(t) = 0.$$

Isto conduz a uma envoltória $e(t) = \text{sinc}(t)$, a qual corresponde exatamente à função escala com uma fase $\theta(t) = 0$.

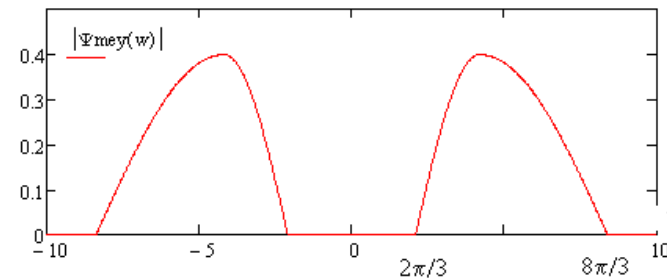
Assim, $\psi_{SHA}(t) = \text{sinc}(t) \cdot \cos(3\pi t/2)$, uma representação conhecida.



Muitas wavelets apresentam *assimetria espectral*, e a frequência central w_0 não corresponde ao meio da faixa, e.g.

wavelet-mãe de Meyer

$$\Psi_{MEY}(w) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin\left[\frac{\pi}{2} \nu\left(\frac{3|w|}{2\pi} - 1\right)\right] e^{-jw/2} & 2\pi/3 \leq |w| \leq 4\pi/3 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos\left[\frac{\pi}{2} \nu\left(\frac{3|w|}{4\pi} - 1\right)\right] e^{-jw/2} & 4\pi/3 \leq |w| \leq 8\pi/3 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



Espectro da wavelet de Meyer, confinamento na faixa espectral $[2\pi/3, 8\pi/3]$, com frequência central $5\pi/2$, mas $w_0=6\pi/2$ e banda $2\pi B=2\pi$, ou seja, 1 Hz.

A representação passa-faixa resulta em:

$$S_C(w) = \frac{1}{2} \left(\Psi_{MEY} \left(w + \frac{6\pi}{3} \right) + \Psi_{MEY} \left(w - \frac{6\pi}{3} \right) \right), \quad S_S(w) = \frac{j}{2} \left(\Psi_{MEY} \left(w + \frac{6\pi}{3} \right) - \Psi_{MEY} \left(w - \frac{6\pi}{3} \right) \right).$$

O espectro em banda básica é esboçado, a envoltória $\Phi(w) = \sqrt{|S_C(w)|^2 + |S_S(w)|^2}$ corresponde *exatamente* à função de escala para a wavelet de Meyer.

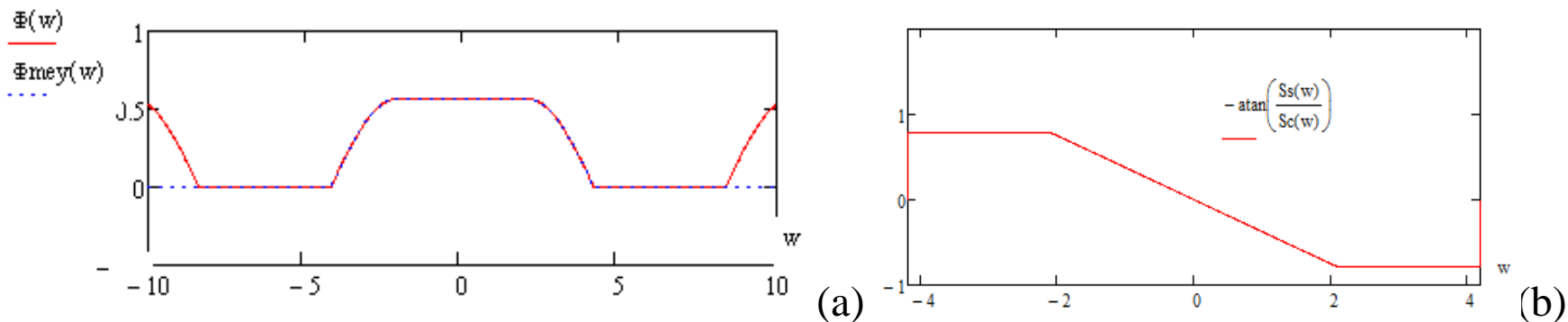
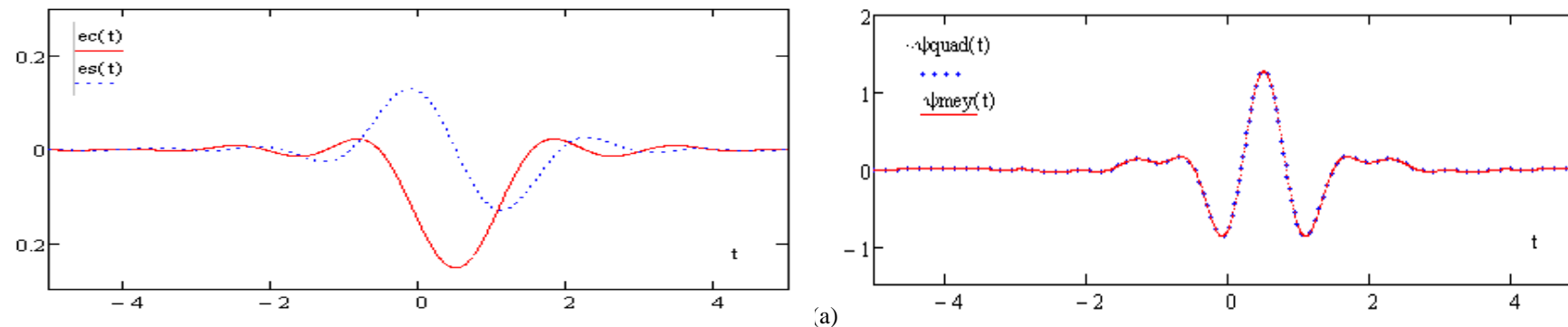


Fig 3. a) Espectro em banda básica para a wavelet de Meyer, corresponde à envoltória da wavelet. b) representação da fase do espectro de $\Phi(w)$ definindo em termos das componentes S_C e S_S .

Representação analítica para a wavelet Meyer, com componentes:

$$\psi_{quad}(t) = s_c(t) \cdot \cos(2\pi t) + s_s(t) \cdot \sin(2\pi t).$$



(b)
Fig 4. a) Componentes *em fase* e *em quadratura* da representação da wavelet de Meyer. b) Gerando a wavelet de Meyer a partir das componentes em fase e em quadratura.

wavelet de Daubechies db4. A frequência “central” w_0 da decomposição foi associada ao pico do espectro (Fig. 5a). As componentes “em fase” e “em quadratura” na Fig. 5b.

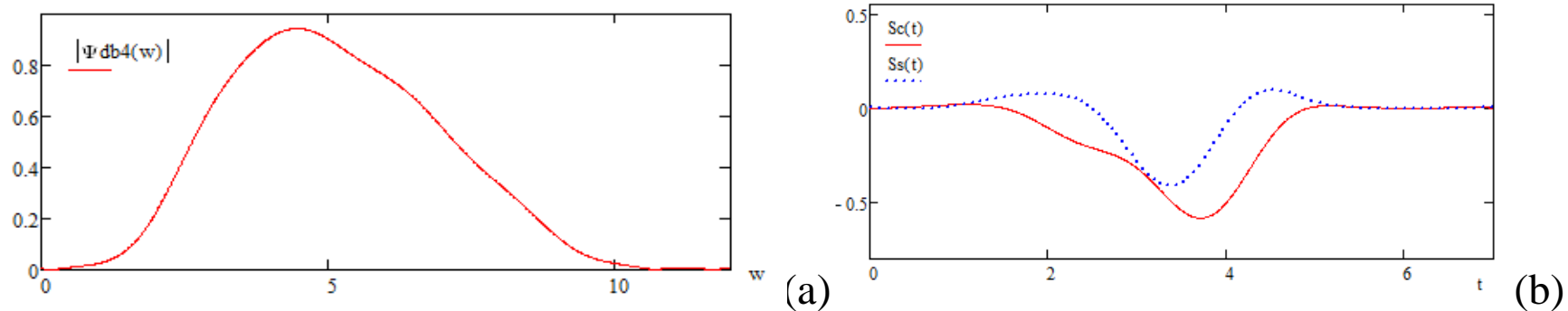


Fig. 5. Decomposição Kotel'nikov para a wavelet db4.

ANÁLISE WAVELET COMO BANCO DE FILTROS SEM SUPERPOSIÇÃO ESPECTRAL

PROPOSIÇÃO 1. *Uma wavelet-mãe contínua cujo espectro é essencialmente confinado (suporte efetivo) na banda $[f_m, f_M]$, realiza uma análise ortogonal provido que $f_M \leq 3f_m$. ■*

Para avaliar uma condição de ortogonalidade entre as análises em diferentes escalas, constrói-se o banco de filtros por escalonamentos sucessivos diádicos.

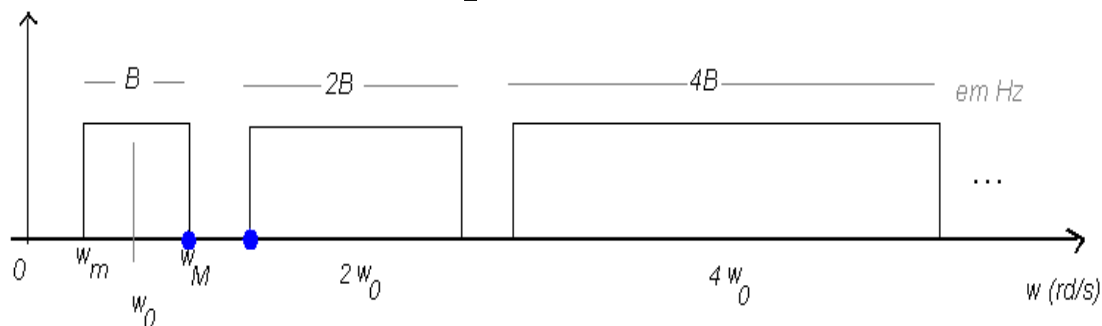


Fig.6: Análise diádica com Q-constante com banco de filtros. A banda B referenciada na figura é $2\pi B = w_M - w_m$ (em rd/s).

A ortogonalidade estabelecida aqui funciona como aquela de sistemas FDM. Melhor resultado (wavelets mais compactas no tempo), como ocorre em OFDM.

Para a wavelet de Meyer, o banco de filtros é mostrado na Fig. 7.

superposição espectral na faixa $[4\pi/3, 8\pi/3]$. A função é escolhida de tal modo que a combinação das componentes superpostas corresponda a uma análise adequada.

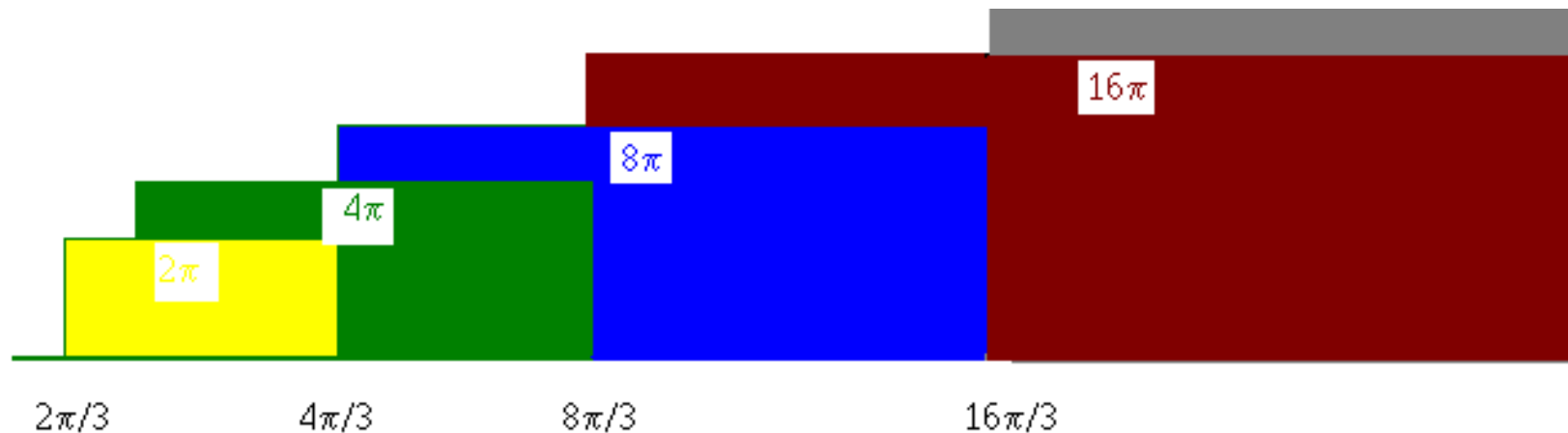


Fig.7: Banco de filtros ortogonais a Q-constante na análise com wavelet de Meyer.



TABELA I: FAIXAS ESPECTRAIS NA ANÁLISE COM BANCO DE FILTROS DE MEYER.

Frequencia referência (assimétrica)	Faixa espectral (superposição)	Banda	Faixa espectral (banco FDM)	Banda
$4\pi/3$	$[2\pi/3, 8\pi/3]$	2π	$[4\pi/3, 8\pi/3]$	$4\pi/3$
$8\pi/3$	$[4\pi/3, 16\pi/3]$	4π	$[8\pi/3, 16\pi/3]$	$8\pi/3$
$16\pi/3$	$[8\pi/3, 32\pi/3]$	8π	$[16\pi/3, 32\pi/3]$	$16\pi/3$
$32\pi/3$	$[16\pi/3, 64\pi/3]$	16π	$[32\pi/3, 64\pi/3]$	$32\pi/3$
...

Note que ocorre a superposição entre o termo $\cos(\cdot)$ e um $\sin(\cdot)$ escalonado. Mas as expressões da wavelet de Meyer já incluem diferentes escalas para os dois termos cossenoidais:

$$\Psi(w) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{cas} \left[\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3|w|}{4\pi} - 1 \right) \right] e^{-jw/2} & 4\pi/3 \leq |w| \leq 8\pi/3 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que $\text{cas}(x) := \cos(x) + \sin(x)$ é a função cassoidal de Hartley.

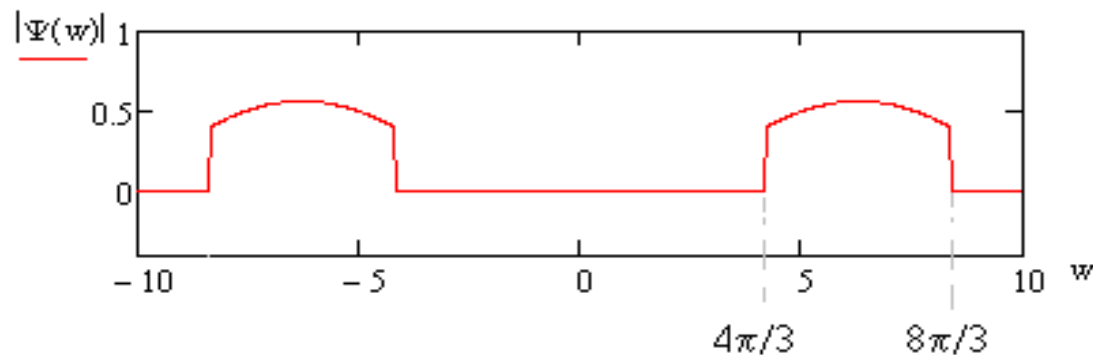


Fig.8: Banco de filtros de Meyer, levando em conta a superposição dos filtros laterais.

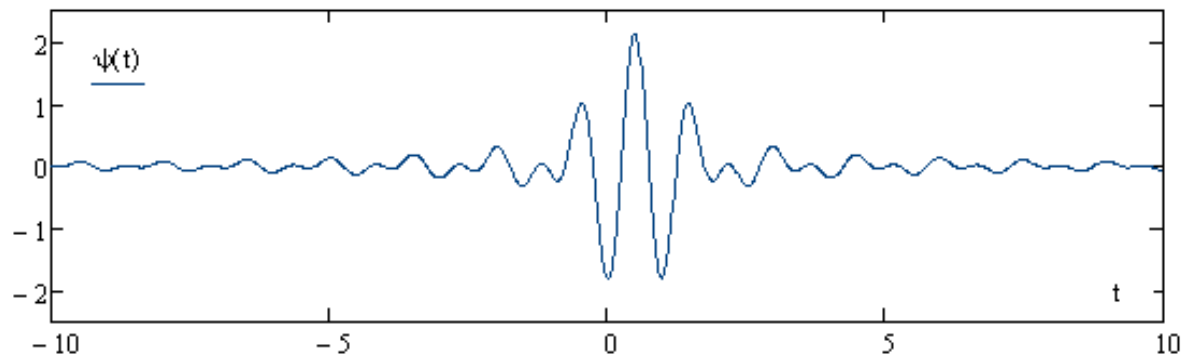


Fig.9: Wavelet “equivalente” de Meyer, levando em conta os efeitos da superposição.



CONCLUSÕES

- representação passa-faixa usando sinal em banda básica para wavelets.
- determinação dos processos de envelope e fase de uma wavelet.

wavelets como banco de filtro:

condições de “não superposição espectral” \Rightarrow condição suficiente sobre o espectro da wavelet-mãe p/ garantir a ortogonalidade do banco de filtros.

wavelets ortogonais que resultam em banco de filtros em que há superposição induzem uma análise “equivalente”, com um banco de filtros ortogonal sem superposição espectral.

- trabalho futuro: sistemas wavelet tipo DWT-OFDM.