

# Uma Ferramenta para Análise de Sons Musicais: A Série Quantizada de Fourier

D. F. de Souza, R. J. de Sobral Cintra, H. M. de Oliveira

**Resumo**—Este trabalho explora uma abordagem alternativa para estimação harmônica de sinais com base em aproximações quantizadas (digitais) do modelo clássico de Fourier. O algoritmo proposto é um bom candidato para aplicações em tempo real que exijam cálculo massivo de estimativas de harmônicos, haja vista seus baixos requisitos computacionais. Em particular, a nova ferramenta de estimação proposta neste artigo pode ser potencialmente útil na análise de sinais de música.

**Palavras-Chave**—Série de Fourier, instrumentos musicais, conteúdo harmônico, quantização em séries, complexidade computacional, espectro em tempo real.

**Abstract**— This work investigates a novel approach for harmonic content estimation, which is based on quantized Fourier series. This algorithm is a suitable candidate for real time applications involving a massive computation of harmonic content of signals, especially due to its low computational complexity. In particular, this new tool can be useful for analysing musical sounds.

**Index Terms**—Fourier series, musical instruments, harmonic content, series quantisation, computational complexity, real time spectrum.

## I. INTRODUÇÃO

A avaliação espectral em tempo real constitui uma ferramenta útil e poderosa em aplicações ligadas à música. A maior parte dos instrumentos musicais fornece sons sonoros, sendo os sons surdos produzidos em menor proporção. Assim, métodos eficientes para a avaliação espectral de sinais com periodicidade constituem um ferramental poderoso na análise de sons musicais [1]. Mesmos sons produzidos pelo aparelho fonador humano contêm uma parcela substancial de trechos sonoros [2]. Uma das questões práticas consiste no projeto de algoritmos rápidos [3], implementáveis em tempo real, para estimar o conteúdo harmônico de sinais [4]. A série de Fourier, a DFT e a “transformada janelada” de Fourier (Gabor) e wavelets tem sido empregadas em parte dos sistemas automáticos ligados à síntese, reconhecimento e classificação de música [5-7]. Este trabalho investiga uma abordagem alternativa para estimação harmônica de sinais com base em aproximações quantizadas (digitais) do modelo clássico de Fourier.

A relação harmônica (timbre) pode permitir identificar o tipo de instrumento atuando num trecho de música [8]. A estimativa das relações entre componentes harmônicas e a fundamental podem, p.ex., alimentar uma rede neuronal treinada para reconhecer o instrumento responsável pelo trecho musical em análise.

A determinação do conteúdo harmônico de um trecho de sinal se faz usualmente com o auxílio de FFTs [3]. Outras abordagens mais promissoras para essa estimativa envolvem o uso da AFT, a Transformada Aritmética de Fourier [9,10]. O algoritmo AFT tem sido aplicado com sucesso na detecção de sinais DTMF (*Dual Tone Multi-Frequency*) [11-12]. Surpreendentemente, ela tem sido relativamente pouco explorada pelos engenheiros. Uma revisão concisa desta técnica pode se encontrada em [13].

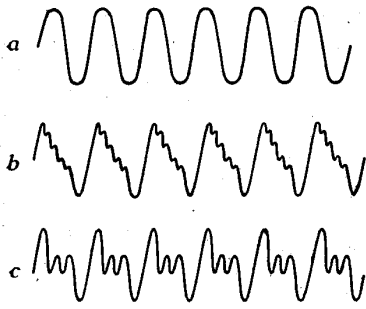
Souza Filho e de Oliveira propuseram um método adaptativo de estimação para sinais estacionários por parte, empregando atualização com base no critério de erro médio quadrático mínimo seqüencial [14].

Um outro método recentemente proposto por Cintra e colaboradores [15], possui analogias ao aqui explorado. O emprego das transformadas arredondadas pode vir a desempenhar um papel inestimável na estimação espectral e harmônica, permitindo uma redução drástica na complexidade computacional em troca de uma perda (controlada) de precisão.

Nos sinais gerados por instrumentos, a amplitude específica a intensidade do som [1], i.e. a potência produzida pela fonte sonora. O timbre especifica a combinação harmônica gerada. Em todos os instrumentos musicais, o som é constituído de uma nota fundamental e um certo número de harmônicos que o caracterizam. Os primeiros harmônicos determinam o timbre do som e os de ordem mais elevada tem importância no "brilho". Um violino, uma flauta e um piano, produzindo uma mesma nota dó (mesma frequência), fornecem sons ligeiramente diferentes, pois embora produzam a fundamental (dó), o conteúdo harmônico produzido por cada instrumento é diferente (e.g. Fig.1). Pela mesma razão, duas pessoas repetindo a mesma frase produzem timbres diferentes, permitindo reconhecer o falante. A flauta doce, por exemplo, é um dos instrumentos musicais de som mais puro, i.e. de menor conteúdo harmônico.

## II. QUANTIZAÇÃO DA BASE DE RIESZ-FOURIER

Uma abordagem para quantizar a série de Fourier consistem em digitalizar a bases de sinais empregada na decomposição. Seja a função sinal  $Sgn(.)$  definida de modo usual,



**Fig. 1.** a) Forma de onda de uma nota dó pura em 512 Hz b) Mesma nota emitida por um piano c) Mesma nota emitida por um órgão.

$$Sgn(x) := \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ +1 & x > 0. \end{cases}$$

Fixada uma janela de largura  $T$ ,  $w_0 := 2\pi/T$ , uma das possíveis decomposições em séries pode considerar o conjunto de sinais digitais

$\{\phi_n(t)\}_{n=0}^{+\infty} = \{1, Sgn(\cos(nw_0t)), Sgn(\sin(nw_0t))\}_{n=1}^{+\infty}$  ao invés da decomposição trigonométrica clássica  $\{\phi_n(t)\}_{n=0}^{+\infty} = \{1, \cos(nw_0t), \sin(nw_0t)\}_{n=1}^{+\infty}$ . Tais sinais serão referidos como co-senos e senos digitais.

A análise desta decomposição pode ser conduzida considerando-se as séries trigonométricas associadas aos sinais  $Sgn(\sin(x))$  e  $Sgn(\cos(x))$ ,  $0 \leq x < 2\pi$ , respectivamente:

$$Sgn(\sin(x)) \cong \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}, \text{ e}$$

$$Sgn(\cos(x)) \cong \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\cos((2k+1)x)}{2k+1}.$$

O conjunto  $\{\phi_n(t)\}_{n=0}^{+\infty} := \{1, Sgn(\cos(nw_0t)), Sgn(\sin(nw_0t))\}_n$  não é ortogonal, nem forma um conjunto completo [4], porém algumas propriedades de ortogonalidade dos sinais neste conjunto podem ser constatadas, aplicando as duas séries de Fourier acima:

$(\forall n, m)$ .

$$\langle Sgn(\sin(nw_0t)), Sgn(\cos(mw_0t)) \rangle = \int_0^T Sgn(\sin(nw_0t)) Sgn(\cos(mw_0t)) dt = 0$$

Isto segue da relação:

$$\int_0^T Sgn(\sin(nw_0t)) Sgn(\cos(mw_0t)) dt = \int_0^T \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)nw_0t)}{2k+1} \cdot \frac{4}{\pi} \sum_{k'=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k'+1)mw_0t)}{2k'+1} dt,$$

a qual resulta em

$$\int_0^T Sgn(\sin(nw_0t)) Sgn(\cos(mw_0t)) dt =$$

$$\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{k'=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1) \cdot (2k'+1)}$$

$$\int_0^T \sin((2k+1)nw_0t) \cdot \cos((2k'+1)mw_0t) dt = 0.$$

Para  $n=m$ , consta-se facilmente que

$$\langle Sgn(\sin(nw_0t)), Sgn(\sin(nw_0t)) \rangle =$$

$$\langle Sgn(\cos(nw_0t)), Sgn(\cos(nw_0t)) \rangle = T.$$

Resta avaliar  $(\forall n \neq m)$

$$\langle Sgn(\cos(nw_0t)), Sgn(\cos(mw_0t)) \rangle = \int_0^T Sgn(\cos(nw_0t)) Sgn(\cos(mw_0t)) dt$$

e

$$\langle Sgn(\sin(nw_0t)), Sgn(\sin(mw_0t)) \rangle = \int_0^T Sgn(\sin(nw_0t)) Sgn(\sin(mw_0t)) dt$$

Por exemplo, para avaliar o produto interno entre senos-digitais:

$$\int_0^T Sgn(\sin(nw_0t)) Sgn(\sin(mw_0t)) dt =$$

$$\int_0^T \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)nw_0t)}{2k+1} \cdot \frac{4}{\pi} \sum_{k'=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k'+1)mw_0t)}{2k'+1} dt.$$

Assim,

$$I := \int_0^T Sgn(\sin(nw_0t)) Sgn(\sin(mw_0t)) dt =$$

$$\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{k'=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1) \cdot (2k'+1)} \int_0^T \sin((2k+1)nw_0t) \cdot \sin((2k'+1)mw_0t) dt$$

Note que a integral do 2º membro é nula, provido que  $(2k+1)n \neq (2k'+1)m$  (i.e., que os harmônicos  $n$  e  $m$  estejam numa razão entre dois ímpares).

O produto interno entre sinais do conjunto  $\{1, Sgn(\cos(nw_0t)), Sgn(\sin(nw_0t))\}_n$  pode ser avaliado em termos da função *qui-fração* definida por

$$\chi(n, m) = \chi\left(\frac{n}{m}\right) = \chi\left(\frac{p}{q}\right) := \begin{cases} \frac{1}{p \cdot q} & \text{se } p, q \text{ são ímpares} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases},$$

em que  $p/q$  é a fração irredutível correspondente a  $n/m$ . As seguintes propriedades são imediatas:  $\chi(n, n) = 1$  e  $\chi(n, m) = \chi(m, n)$ .

Lembrando [16] que a série  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ , tem-se

$$I = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{8} \cdot \chi(n, m) \cdot \frac{T}{2}.$$

O produto interno vale  $\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \chi(n, m) \cdot T$ .

Os valores dos produtos internos para os senos e co-senos digitais estão ilustrados na Tabela I abaixo. A diagonal principal tem magnitude superior a qualquer outra. Valores distantes da diagonal são tipicamente ordem de grandeza inferiores aos valores da diagonal.

TABELA I.  
PRODUTO INTERNO ENTRE AS FUNÇÕES SENO-DIGITAL

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0												
1	T		-T/3		T/5		-T/7		T/9		-T/11	
2		T				-T/3				T/5		
3			T				T/21			-T/3		T/33
4				T								-T/3
5					T				T/45			-T/55
6						T					-T/15	
7							T			-T/63		T/77
8								T				
9									T			-T/99
10										T		
11											T	
12												T

A série “digital” de Fourier para um sinal  $f(t)$  num intervalo de amplitude  $T$  é expressa por:  $t_0 < t < t_0 + T$ ,

$$f(t) \cong A_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \text{Sgn}(\cos(nw_0t)) + B_n \text{Sgn}(\sin(nw_0t)),$$

em que os coeficientes de Fourier-Plank devem ser escolhidos para minimizar o erro médio quadrático (norma do erro) [17].

Fixado um número  $N+1$  de termos da série ( $N$  “harmônicos digitais”), os coeficientes ( $A_0$  à parte) podem ser obtidos resolvendo os sistemas lineares:

$$\begin{bmatrix} \chi_{1,1} & \chi_{1,2} & \chi_{1,3} & \dots & \chi_{1,N} \\ \chi_{2,1} & \chi_{2,2} & \chi_{2,3} & \dots & \chi_{2,N} \\ \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & \dots & \frac{2}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_{N,1} & \chi_{N,2} & \chi_{N,3} & \dots & \chi_{N,N} \\ \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & \dots & \chi_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f(t), \text{Sgn}(\cos(w_0t)) \rangle \\ \langle f(t), \text{Sgn}(\cos(2w_0t)) \rangle \\ \langle f(t), \text{Sgn}(\cos(3w_0t)) \rangle \\ \vdots \\ \langle f(t), \text{Sgn}(\cos(Nw_0t)) \rangle \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \chi_{1,1} & \chi_{1,2} & \chi_{1,3} & \dots & \chi_{1,N} \\ \chi_{2,1} & \chi_{2,2} & \chi_{2,3} & \dots & \chi_{2,N} \\ \frac{2}{2} & \chi_{2,2} & \frac{2}{2} & \dots & \frac{2}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_{N,1} & \chi_{N,2} & \chi_{N,3} & \dots & \chi_{N,N} \\ \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & \dots & \chi_{N,N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f(t), \text{Sgn}(\sin(w_0t)) \rangle \\ \langle f(t), \text{Sgn}(\sin(2w_0t)) \rangle \\ \langle f(t), \text{Sgn}(\sin(3w_0t)) \rangle \\ \vdots \\ \langle f(t), \text{Sgn}(\sin(Nw_0t)) \rangle \end{bmatrix}$$

As matrizes para os casos particulares  $N=5$  e  $N=10$  são exibidas abaixo, a título ilustrativo. As matrizes obtidas são sempre “quase-diagonais” e a inversa é uma “quase-identidade”. Esta análise é bastante próxima àquela proposta por Cintra e colaboradores [15] para a transformada arredondada de Hartley.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{30} & 0 & 1 \end{bmatrix} e$$

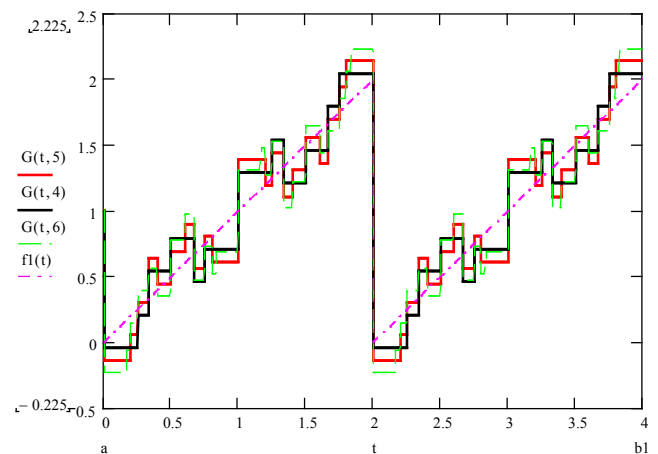
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{14} & 0 & \frac{1}{18} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{6} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{30} & 0 & \frac{1}{42} & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{30} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{70} & 0 & \frac{1}{90} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{14} & 0 & \frac{1}{42} & 0 & \frac{1}{70} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{126} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{18} & 0 & \frac{1}{90} & 0 & \frac{1}{126} & 0 & \frac{1}{126} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, como uma *aproximação simplificada*, as seguintes relações podem ser usadas para encontrar uma estimativa dos coeficientes:

$$A_0 \cong \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt; A_n \cong \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \text{Sgn}(\cos(nw_0t)) dt e$$

$$B_n \cong \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \text{Sgn}(\sin(nw_0t)) dt.$$

As relações acima correspondem a assumir as formas de onda  $\{\phi_n(t)\}_{n=0}^{+\infty}$  como se fossem ortogonais e são praticamente idênticas às expressões clássicas da série trigonométrica de Fourier [16]. A título ilustrativo, considerou-se um sinal periódico em rampa, mostrado na Fig. 2, com as aproximações quantizadas variando-se o número de harmônicos da série digital.



**Fig. 2.** Aproximações usando a Série Quantizada de Fourier para uma rampa de período 2 (pontilhada). As curvas  $G(t, N)$  denotam as aproximações utilizando  $N$  harmônicos digitais,  $N=4, 5$  e  $6$ .

Os coeficientes  $\{A_n\}$  e  $\{B_n\}$  da série de Fourier quantizada são relacionados com os coeficientes  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  da série trigonométrica de Fourier através das relações:

$$A_n = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} a_{n(2k+1)} e$$

$$B_n = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)} b_{n(2k+1)}.$$

Assim, os valores dos coeficientes da série quantizada podem ser calculados em termos dos coeficientes da série trigonométrica clássica:

$$B_1 = \frac{2.1}{\pi} \left( b_1 + \frac{b_3}{3} + \frac{b_5}{5} + \dots \right)$$

$$B_2 = \frac{2.2}{\pi} \left( \frac{b_2}{2} + \frac{b_6}{6} + \frac{b_{10}}{10} + \dots \right)$$

$$B_3 = \frac{2.3}{\pi} \left( \frac{b_3}{3} + \frac{b_9}{9} + \frac{b_{15}}{15} + \dots \right)$$

...

### III. ESTIMATIVA HARMÔNICA LIVRE DE MULTIPLICAÇÕES

As aproximações geradas pela série quantizada (e.g., Fig.2) podem parecer pouco adequadas, principalmente devido ao fato que o erro da aproximação não diminui

assintoticamente com o aumento do número de harmônicos da série digital. Entretanto, propõe-se o uso de uma fórmula de inversão para estimar os coeficientes de Fourier com base nos coeficientes da série quantizada.

Usando-se uma fórmula de inversão [9], os coeficientes  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  da série trigonométrica de Fourier podem ser relacionados com os coeficientes  $\{A_n\}$  e  $\{B_n\}$  da série de Fourier quantizada, através das relações:

$$a_n = \frac{\pi}{2} \cdot A_n + \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)} \cdot A_{n(2k+1)},$$

$$b_n = \frac{\pi}{2} \cdot B_n - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)} \cdot B_{n(2k+1)}.$$

Para um sinal tempo-discreto com  $N$  amostras, considera-se um número de harmônicos  $N_H < \lfloor N/2 \rfloor$  e as séries

infinitas são calculadas até  $L(n) = \left\lfloor \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{N_H}{n} - 1 \right) \right\rfloor$ ,

resultando em:

$$\tilde{a}_n = \frac{\pi}{2} \cdot A_n + \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{L(n)} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)} \cdot A_{n(2k+1)} \quad (I)$$

$$\tilde{b}_n = \frac{\pi}{2} \cdot B_n - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{L(n)} \frac{1}{(2k+1)} \cdot B_{n(2k+1)}. \quad (II)$$

Truncando a série quantizada em  $N_H=10$  harmônicos digitais, por exemplo, resulta nas seguintes estimativas para os coeficientes trigonométricos de Fourier:

$$\tilde{b}_1 = \frac{\pi}{2} \left( B_1 - \frac{B_3}{3} - \frac{B_5}{5} - \frac{B_7}{7} - \frac{B_9}{9} \right)$$

$$\tilde{b}_2 = \frac{\pi}{2} \left( B_2 - \frac{B_6}{3} - \frac{B_{10}}{5} \right)$$

$$\tilde{b}_3 = \frac{\pi}{2} \left( B_3 - \frac{B_9}{3} \right)$$

$$\tilde{b}_n = \frac{\pi}{2} (B_n) \quad 4 \leq n \leq 10.$$

Nota-se que os coeficientes  $\{\tilde{a}_n\}_1^{N_H}$  da série trigonométrica de Fourier convergem mais rápidos do que os

coeficientes  $\{\tilde{b}_n\}_1^{N_H}$  por se tratar de uma série alternada.

Nota-se também que se considerando poucos harmônicos para a Série quantizada de Fourier, as aproximações chegam praticamente a coincidir com aquelas da Série de Fourier Clássica. Desta forma, ao invés de utilizar  $L(n)$  termos (que apresenta dependência com  $n$ ), o número  $L(n)$  pode ser fixado em um número predeterminado de termos, no máximo igual a  $K$ . Uma estimativa livre de multiplicações ponto flutuante (de baixa complexidade) para aplicações em tempo real intensivas em avaliação de harmônicos pode ser realizada através da série quantizada de Fourier (série digital de Fourier), como descrito a seguir. A maneira de transformar as operações de multiplicação em ponto fixo corresponde a multiplicar todos os coeficientes por  $2.(N!!)$  se  $N$  é ímpar, ou  $2.((N-1)!!)$ , caso contrário, em que  $(2m+1)!! = 1.3... (2m+1)$  e  $(2m)!! = 2.4... (2m)$  [16]. O cálculo numérico (versão discreta) dos coeficientes da série de Fourier digital (quantizada) só envolve adições de amostras e é livre de multiplicações. Sendo o sinal amostrado a uma taxa de  $1/T_s$  amostras.seg<sup>-1</sup> então:

$$T\tilde{A}_n = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT_s) \text{Sgn} \left( \cos \left( \frac{2\pi mk}{NT_s} \right) \right), \quad 1 \leq n \leq N-1.$$

$$T\tilde{B}_n = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT_s) \text{Sgn} \left( \text{sen} \left( \frac{2\pi mk}{NT_s} \right) \right), \quad 1 \leq n \leq N-1.$$

Os valores dos coeficientes de Fourier estimados via série quantizada foram obtidos usando um arquivo .wav contendo a *Quinta Sinfonia* de Beethoven, (16-bit, mono, *signed*), com taxa de amostragem de 22.050 Hz, considerando-se apenas  $K=3$ . A Tabela II ilustra a concordância das aproximações e os coeficientes exatos.

TABELA II.

COEFICIENTES DA SÉRIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER, PARA UM SINAL COM  $N=128$  AMOSTRAS DA QUINTA SINFONIA DE BEETHOVEN.

Aproximações usando síntese clássica de Fourier		Aproximações usando síntese com série de Fourier Quantizada	
$a_1 = -0.0129$	$b_1 = -0.0080$	$\tilde{a}_1 = -0.0133$	$\tilde{b}_1 = -0.0089$
$a_2 = -0.0074$	$b_2 = 0.0015$	$\tilde{a}_2 = -0.0082$	$\tilde{b}_2 = -0.0000$
$a_3 = 0.0003$	$b_3 = -0.0034$	$\tilde{a}_3 = 0.0015$	$\tilde{b}_3 = -0.0043$
$a_4 = 0.0023$	$b_4 = -0.0015$	$\tilde{a}_4 = 0.0027$	$\tilde{b}_4 = -0.0017$
$a_5 = -0.0070$	$b_5 = 0.0035$	$\tilde{a}_5 = -0.0079$	$\tilde{b}_5 = 0.0031$

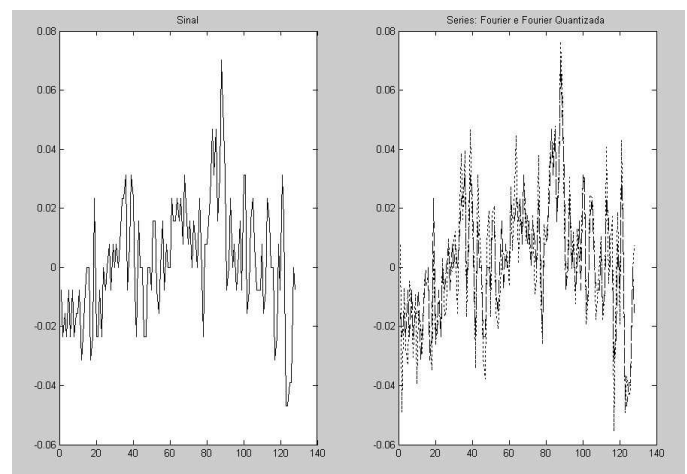
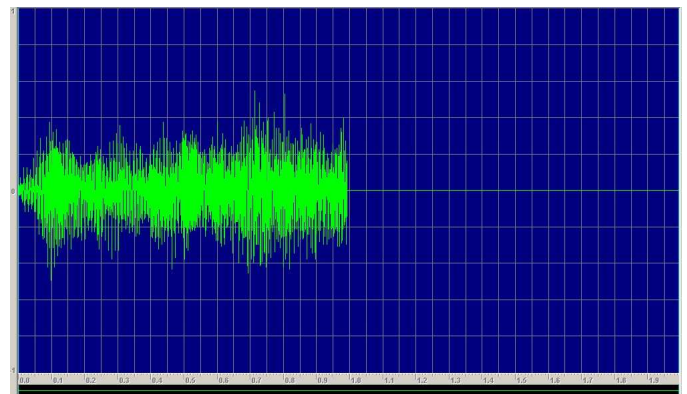


Fig. 3. a) Trecho de ~1,0 segundo da Quinta Sinfonia de Beethoven, correspondente a 21.495 amostras (16-bit, mono, *signed*) taxa de amostragem 22.050 Hz; b) Trecho inicial do sinal original ( $N=128$  amostras); Aproximações por síntese clássica de Fourier (*traço*) e síntese com série de Fourier Quantizada (*ponto*).

A fig. 3 mostra os resultados obtidos para o trecho inicial da música, de duração 1 segundo. Apesar das pequenas diferenças entre as séries, os dois arquivos correspondentes aos sinais sintetizados soam próximos (detalhes em <http://www2.ee.ufpe.br/codec/Fourierquantizada.html>). A série quantizada introduz um ruído de fundo que pode ser desprezível em aplicações que envolvem apenas a detecção do conteúdo harmônico, sem maior preocupação com a qualidade (reprodução de áudio).

#### IV. COMENTÁRIOS FINAIS

O intuito desta investigação foi tão somente fornecer uma ferramenta auxiliar na análise harmônica; questões tais como a classificação de instrumentos que podem ter produzido um trecho de áudio podem ser exploradas [8]. A complexidade na avaliação (rápida) do comportamento harmônico tem constituído um dos desafios da análise de sinais em tempo real. A verdadeira revolução em processamento de sinais acarretada pela consolidação das FFTs vem viabilizando aplicações há pouco restritas ao plano teórico. Um algoritmo livre de multiplicações foi proposto para implementar um estimador computacionalmente eficiente do conteúdo harmônico de sinais. Apesar de introduzir uma *perda de precisão* na estimativa dos coeficientes (não caracterizada aqui), ele pode encontrar aplicações em situações em que há tolerância a tais erros. Em particular, a nova ferramenta de estimação proposta neste artigo pode ser potencialmente útil na análise de sinais de música, caracterizados por comportamento quase-periódico. Apesar do fato que resultados aqui apresentados sejam bastante prospectivos, o estudo de sons instrumentais pode se beneficiar das ferramentas desenvolvidas neste artigo. Aplicações suplementares incluem problemas envolvendo detecção, estimação e decisão. O método pode também ser útil em qualquer situação na qual o conteúdo harmônico precise ser avaliado, como sinais de tensão em linhas de potência.

#### REFERÊNCIAS

- [1] G. Assayag, J-P. Cholleton, Music, nombre et ordinateurs, *La Recherche*, N.278, pp. 804-809, juillet-août 1995.
- [2] L.R. Rabiner, B. Juang, *Fundamentals of Speech Recognition*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1993.
- [3] R.E. Blahut, *Fast Algorithms for Digital Signal Processing*, Addison-Wesley, 1985.
- [4] P.A. Morettin, *Ondas e Ondaletas: da Análise de Fourier à Análise de Ondaletas*. São Paulo: Edusp, 1999. [4] A. Wiczorkowsky, Musical sound classification based on Wavelet analysis, *Fundamenta-Informaticae*, vol.47, n.1-2, July, pp.175-188, 2001.
- [5] G. Tzanetakis, P. Cook, Automatic Musical Genre Classification of Audio Signals, *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing*, vol. 10, July pp. 293-302, 2002.
- [6] E.D. Scheirer, M. Slaney, Construction and Evaluation of a Robust Multifeature Speech/Music Discriminator, *IEEE Int. Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing ICASSP 1997*, pp.1331-1334, 1997.
- [7] K.D. Martin, E.D. Scheirer, B.L. Vercoe, Musical content analysis through models of audition, Proc. 1998 *ACM Multimedia Workshop on Content-Based Processing of Music*. Bristol, England, September, 1998.
- [8] K.D. Martin, Y.E. Kim, Musical instrument identification: a pattern-recognition approach. 136th Meeting of the Acoustical Society of America, Norfolk, VA, October, 1998.
- [9] D.W. Tufts, A.G. Sadasiv, The Arithmetic Fourier Transform, *IEEE ASSP Magazine*, pp. 13-17, Jan., 1998.
- [10] R.J.S. Cintra, H.M. de Oliveira, How To Interpolate in Arithmetic Transform Algorithms In: *IEEE Int. Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing ICASSP 2002*, Orlando, Florida, 2002.
- [11] J.B. Lima, R.M.C. Souza, H.M. de Oliveira, M.M.C. Souza, Decodificação de Sinais DTMF Via Transformada Aritmética de Fourier, *XXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, SBrT'04*, Belém, Pará, 6-9 Setembro, 2004.
- [12] J.B. Lima, R.M.C. Souza, H.M. de Oliveira, M.M.C. Souza, Faster DTMF Decoding, *Lecture Notes in Computer Science, LNCS 3124*, J.N. Souza, P. Dini, P. Lorenz eds., Heidelberg: Springer Verlag, v.1, pp.510-515, 2004.
- [13] R.J.S. Cintra, H.M. de Oliveira, A Short Survey on Arithmetic Transforms and the Arithmetic Hartley Transform, *Journal of the Brazilian Telecommunications Society*, vol. 19, August, pp.68-79, 2004.
- [14] E.B. Souza Filho, H.M. de Oliveira, Estimação dos Coeficientes de uma Série de Fourier usando o Método dos Mínimos Quadrados Sequencial In: I Congresso de Informática da Amazônia, 2001, Manaus. *Anais do I Congresso de Informática da Amazônia*, v.1, p.271-283, 2001.
- [15] R.J.S. Cintra, H.M. de Oliveira, C.O. Cintra, The Rounded Hartley Transform, *Proc. IEEE/SBrT Int. Telecomm. Symp.*, pp. 455-460, 2002.
- [16] I.S. Gradshteyn; I.M. Ryzhik., *Table of Integrals, Series, and Products*, 4<sup>th</sup> Ed., New York: Academic Press, 1965.