

Uma Representação Kotel'nikov para Wavelets e Bancos de Filtros sem Superposição Espectral

H. M. de Oliveira, R. J. Cintra, R. C. de Oliveira

Resumo—Neste artigo apresenta-se uma representação para wavelets usando sinais em banda básica, explorando resultados de Kotel'nikov. Detalhes de como obter os processos de envoltória e de fase em baixa frequência são apresentados. A interpretação clássica de wavelets como uma análise com banco de filtros de fator de qualidade constante é revisitada nestas bases. Mostra-se que se o suporte espectral da wavelet é limitado na banda $[f_m, f_M]$, então uma análise ortogonal é garantida provido que $f_M \leq 3f_m$, um resultado simples, porém que invoca um paralelo com a taxa de Nyquist. Contudo, para espectro de wavelets ortogonais que não verificam esta condição, mostra-se como construir um banco de filtros “equivalente” sem superposição espectral.

Palavras-Chave—wavelets, banco de filtros Q-constante, wavelets ortogonais, representação passa-faixa para wavelets.

Abstract— This paper presents a wavelet representation using baseband signals, by exploiting Kotel'nikov results. Details of how to obtain the processes of envelope and phase at low frequency are shown. The archetypal interpretation of wavelets as an analysis with a filter bank of constant quality factor is revisited on these bases. It is shown that if the wavelet spectral support is limited into the band $[f_m, f_M]$, then an orthogonal analysis is guaranteed provided that $f_M \leq 3f_m$, a quite simple result, but that invokes some parallel with the Nyquist rate. Nevertheless, in cases where the spectrum of orthogonal wavelets does not verify this condition, it is shown how to construct an "equivalent" filter bank with no spectral overlapping.

Keywords—wavelets, constant-Q filter bank, orthogonal wavelets, bandpass representation for wavelets.

I. INTRODUÇÃO

Wavelets e a análise de multirresolução de Mallat já se tornaram ferramentas consagradas na análise de sinais, principalmente por fornecer um processamento mais eficiente, e com a disponibilização crescente de novas técnicas [1], [2]. Uma das interpretações usuais para introduzi-las é o emprego de banco de filtros com Q-constante, de fácil compreensão [3]. Adicionalmente, o comportamento passa-faixa das wavelets é uma das características largamente reconhecidas [2]. Em sistemas de comunicação e em modelos de ruído [4], [5], uma das representações mais relevantes e mais utilizadas é a representação passa-banda [6], envolvendo um sinal em banda básica modulado. Como a condição de admissibilidade de wavelets, $\psi(t) \leftrightarrow \Psi(w)$, impõe um zero na origem do espectro, i.e., $\Psi(0)=0$, estes sinais são reconhecidamente passa-faixa. *Como aplicar as representações passa-faixa usuais em Telecomunicações para wavelets?* Este é um dos

focos deste artigo. Neste contexto, resgata-se o seguinte teorema por Kotel'nikov.

Teorema (Kotel'nikov, 1933). *Se um sinal $f(t)$ tem um espectro confinado na banda $[w_1, w_2]$, então existe um representação*

$$f(t) = g(t) \cdot \cos \left[\frac{w_1 + w_2}{2} t + \theta(t) \right], \text{ sendo } g(t) \text{ e } \theta(t) \text{ processos de baixa-frequência, limitados em } \left[0, \frac{w_2 - w_1}{2} \right]. \blacksquare$$

Este resultado foi demonstrado no artigo pioneiro da demonstração do teorema da amostragem (anterior ao teorema de Shannon [7], [8]). Uma elegante demonstração é encontrada em *Theorem 4* [5].

O trabalho é organizado com indicado a seguir. Inicialmente, introduz-se na Seção II, uma representação passa-faixa para wavelets, mostrando como obter os sinais de envoltória e de fase. Isto é aplicado algumas wavelets conhecidas, ilustrando a representação. Na Seção III, investigam-se os efeitos do escalonamento (geração de wavelets-filhas), conectando-se direta e naturalmente à análise wavelet com banco de filtros. A imposição da condição de não haver superposição espectral dos filtros leva a uma nova condição para a análise ortogonal. Novamente, mostra-se que a condição é verificada para algumas wavelets contínuas ortogonais conhecidas, incluindo a wavelet de Shannon. Para wavelets com assimetria no espectro, incluindo wavelet de Meyer [9], [10], Daubechies (e.g. db4 [2]), wavelet de “de Oliveira” [11], a análise também é feita. As conclusões são afinal apresentadas na Seção IV.

II. REPRESENTAÇÃO PASSA-FAIXA PARA WAVELETS

A aplicação direta do Teorema de Kotel'nikov para uma wavelet-mãe com espectro (efetivamente) confinado na faixa espectral $[f_m, f_M]$, resulta na representação:

$$\psi(t) = e(t) \cdot \cos[\pi \cdot (f_M + f_m)t + \theta(t)], \quad (1)$$

sendo $e(t)$ e $\theta(t)$ processos em banda básica, de espectros limitados em $[0, B/2]$, sendo $B := (f_M - f_m)$ a banda passante da wavelet. Uma forma alternativa é considerar um envelope complexo em banda-básica, modulado por uma portadora:

$$\psi(t) = \Re \{ S_b(t) \cdot e^{j\pi \cdot (f_M + f_m)t} \}, \quad (2)$$

em que $S_b(t) := e(t) \cdot e^{j\theta(t)}$ é um sinal (complexo) em banda-básica. De forma direta, como é feito na análise de sinais em Sistemas de Telecomunicações [4], [6], investiga-se como obter uma descrição dos processos componentes $e(t)$ e $\theta(t)$ a partir da forma de onda de $\psi(t)$. A despeito do fato de que a envoltória pode ser extraída diretamente a partir do uso de detector de envoltória clássico [4], optou-se por uma

abordagem que permita uma formulação analítica para ambos os processos, envoltória e fase. Nesta linha, usa-se detecção síncrona [4] para “demodular” a wavelet. A frequência de portadora virtual é exatamente no ponto central do espectro da wavelet-mãe:

$$w_c := \frac{w_m + w_M}{2} \Rightarrow f_c := \frac{f_m + f_M}{2} \quad (\text{Hz}) \quad (3)$$

A detecção se faz em duas componentes, “in phase” e “in quadrature”, usando filtros passa-baixa para obter as componentes respectivas. A Fig. 1 ilustra o processo de decomposição da wavelet. A análise é convenientemente separada nos ramos superior e inferior.

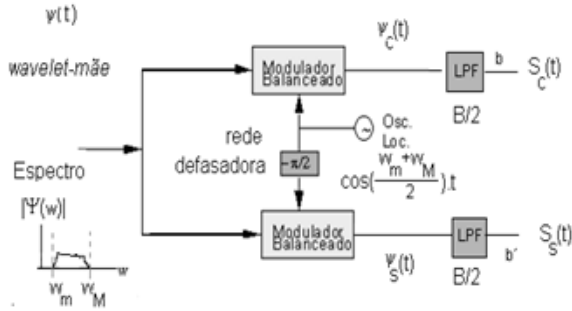


Fig 1. Decomposição de uma wavelet confinada na faixa espectral $[w_m, w_M]$ em suas componentes de baixa frequência, em fase e em quadratura. O valor de B corresponde à banda da wavelet, $2\pi B = w_M - w_m$.

A Fig. 1 exhibe dois ramos de análise:

a) Ramo superior

$$\psi_c(t) := \psi(t) \cdot \cos \left[\frac{w_m + w_M}{2} t \right], \quad (4a)$$

b) Ramo inferior

$$\psi_s(t) := \psi(t) \cdot \sin \left[\frac{w_m + w_M}{2} t \right], \quad (4b)$$

Empregando-se a representação de Kotelnikov em (1) e substituindo em (4a), obtêm-se a componente em fase:

$$\psi_c(t) = \frac{e(t) \cdot \cos[\theta(t)]}{2} + \frac{e(t)}{2} \cdot \cos[(w_m + w_M)t + \theta(t)], \quad (5)$$

E a saída é filtrada passa-baixa, com frequência de corte em $B/2$, resultando, portanto, em:

$$s_c(t) := \psi_c(t)|_{LPF ed} = \frac{e(t) \cdot \cos[\theta(t)]}{2}, \quad (6)$$

De modo análogo, chegam-se as equações:

$$\psi_s(t) = -\frac{e(t) \cdot \sin[\theta(t)]}{2} + \frac{e(t)}{2} \cdot \sin[(w_m + w_M)t + \theta(t)], \quad (7)$$

E a saída é filtrada passa-baixa, com frequência de corte em $B/2$, resultando, portanto, em:

$$s_s(t) := \psi_s(t)|_{LPF ed} = -\frac{e(t) \cdot \sin[\theta(t)]}{2}. \quad (8)$$

Das equações (6) e (8), derivam-se relações similares as “equações clássicas” da teoria de comunicações:

$$e(t) = 2 \cdot \sqrt{s_c^2(t) + s_s^2(t)} \quad e \quad \theta(t) = -tg^{-1} \left(\frac{s_s(t)}{s_c(t)} \right). \quad (9)$$

A envoltória $e(t)$ da representação passa-faixa da wavelet tem uma relação com a função de escala associada. A análise correspondente aos filtros “passa-faixa ideal” define uma decomposição usando wavelets conhecidas como wavelets de Shannon, cujo espectro é mostrado na Fig. 2.

$$\Psi_{SHA}(w) = \prod \left(\frac{w - 3\pi/2}{\pi} \right) + \prod \left(\frac{w + 3\pi/2}{\pi} \right), \quad (10)$$

em que $\prod(t) := \begin{cases} 1 & |t| < 1/2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$ é a função porta normalizada.

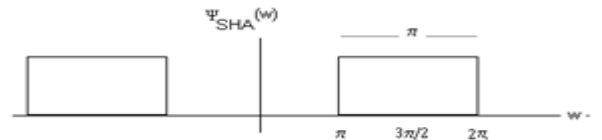


Fig 2. Espectro da wavelet de Shannon, observando o confinamento na faixa espectral $[\pi/2, 5\pi/2]$, com frequência central $w_0 = 3\pi/2$ e banda $2\pi B = \pi$, ou seja, 0,5 Hz.

A representação passa-faixa resulta em $s_c(t) = \text{sinc}(t)$, em que $\text{sinc}(t) := \sin(\pi t) / \pi t$, enquanto que $s_s(t) = 0$. Note que a simetria no espectro implica em componente em quadratura nula. Isto conduz a uma envoltória $e(t) = \text{sinc}(t)$, a qual corresponde exatamente à função escala com uma fase $\theta(t) = 0$ [1], [2]. Assim, $\psi_{SHA}(t) = \text{sinc}(t) \cdot \cos(3\pi t/2)$, uma representação conhecida. Muitas wavelets contínuas reais já são naturalmente definidas sob esta representação. Até mesmo uma wavelet de suporte infinito em ambos os domínios, tempo e frequência, incluindo a wavelet real de Morlet, $\psi_{Morlet}(t) = e^{-t^2} \cdot \cos(\pi\sqrt{2/\ln 2} \cdot t)$, $f_0 = 1/\sqrt{2\ln 2}$, pode ser aproximada por uma limitação de suporte efetivo na frequência. Trata-se de algo como supor que sinais reais de fala sejam banda limitados. Neste ponto, vale uma discussão como àquela da análise de Slepian sobre limitação de banda [12]. Já muitas outras wavelets com *assimetria espectral*, a frequência central w_0 não corresponde ao meio da faixa como na (1). Considerando, por exemplo, a wavelet-mãe de Meyer (Fig. 3), a partir da qual se constrói wavelets ortogonais indefinidamente deriváveis de suporte infinito (as primeiras wavelets não triviais introduzidas), temos, no domínio frequencial, que:

$$\Psi_{MEY}(w) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin \left[\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3|w|}{2\pi} - 1 \right) \right] e^{-jw/2} & 2\pi/3 \leq |w| \leq 4\pi/3 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos \left[\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3|w|}{4\pi} - 1 \right) \right] e^{-jw/2} & 4\pi/3 \leq |w| \leq 8\pi/3 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (11)$$

em que $\mathcal{U}(x) := \{0 \ \forall x \leq 0, x \ \forall 0 \leq x \leq 1, 1 \ \forall x \geq 1\}$ [2], [10].

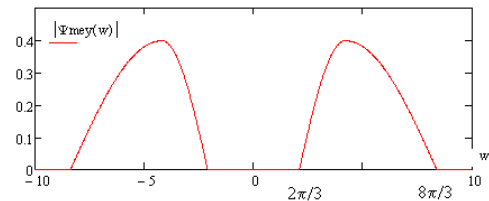


Fig 3. Espectro da wavelet de Meyer, observando o confinamento na faixa espectral $[2\pi/3, 8\pi/3]$, com frequência central $5\pi/2$, mas $w_0 = 6\pi/2$ e banda $2\pi B = 2\pi$, ou seja, 1 Hz.

Para implementação em banco de filtros, vide [13]. Assim, a representação passa-faixa resulta em:

$$S_c(w) = \frac{1}{2} \left(\Psi_{MEY} \left(w + \frac{6\pi}{3} \right) + \Psi_{MEY} \left(w - \frac{6\pi}{3} \right) \right),$$

$$S_s(w) = \frac{j}{2} \left(\Psi_{MEY} \left(w + \frac{6\pi}{3} \right) - \Psi_{MEY} \left(w - \frac{6\pi}{3} \right) \right). \quad (12)$$

O espectro do sinal em banda básica $\Phi(w)$ é esboçado na Fig. 4, i.e., uma envoltória $\Phi(w) = \sqrt{|S_c(w)|^2 + |S_s(w)|^2}$. Isto corresponde *exatamente* à função de escala para a wavelet de Meyer. Curiosamente, esta mesma expressão aplicada à wavelet de Shannon também resulta na função de escala.

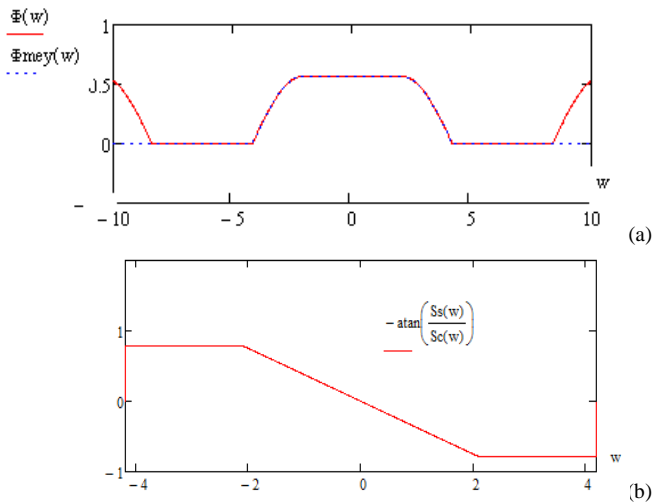


Fig. 4. a) Espectro da componente em banda básica para a wavelet de Meyer, que corresponde à envoltória da wavelet. O espectro é nulo para $|w| \geq \pi$ caracterizando um sinal banda limitada em 0.5 Hz. b) representação da fase do espectro de $\Phi(w)$ definindo em termos das componentes S_c e S_s , cf. (12).

Chega-se a uma representação analítica para a wavelet Meyer, com componentes esboçadas na Fig.5a:

$$\psi_{quad}(t) = s_c(t) \cdot \cos(2\pi t) + s_s(t) \cdot \sin(2\pi t). \quad (13)$$

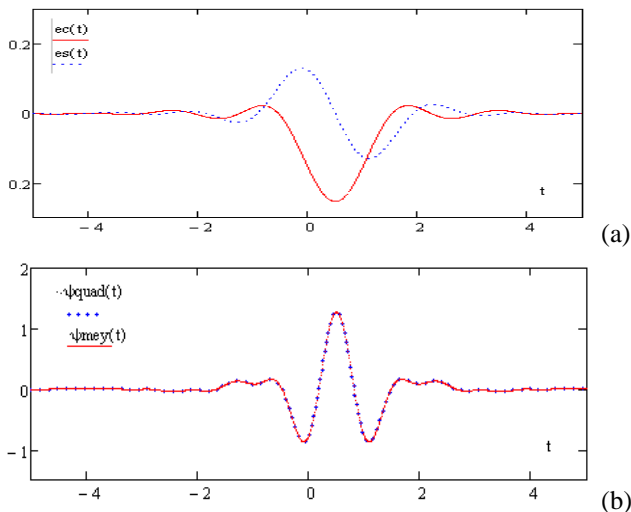


Fig. 5. a) Componentes em fase e em quadratura da representação da wavelet de Meyer. b) Gerando a wavelet de Meyer a partir das componentes em fase e em quadratura descritas em (Fig.5a), segundo a representação $\psi_{quad}(t)$ em passa-faixa da equação (13). A função $\psi_{mey}(t)$ foi obtida através da transformada inversa de Fourier em (11).

Outra decomposição similar pode ser obtida para a wavelet de Daubechies db4, usando as aproximações analíticas em série quasi-harmônica propostas em [14]. A frequência “central” w_0 da decomposição foi associada ao pico do espectro (Fig. 6a). As componentes respectivas “em fase” e “em quadratura” são mostradas na Fig. 6b. A síntese da wavelet db4 (aproximada) a partir das duas componentes resultou exatamente na expressão original (Fig. 7), como esperado.

Outra wavelet de suporte compacto na frequência é a wavelet complexa de "de Oliveira" [11].

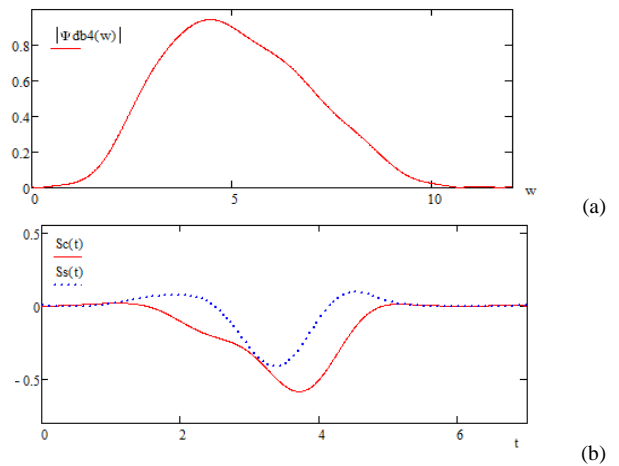


Fig. 6. Decomposição Kotel'nikov para a wavelet db4 usando as aproximações analíticas propostas em [15].

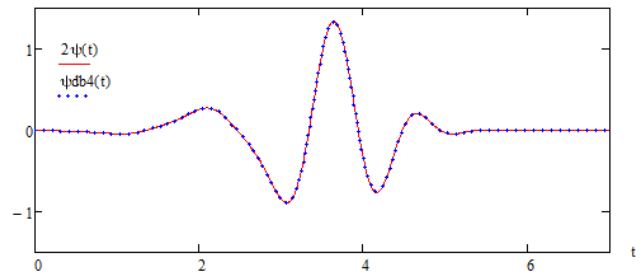


Fig. 7. Recuperação de db4 usando as componentes em fase e quadratura.

III. ANÁLISE WAVELET COMO BANCO DE FILTROS SEM SUPERPOSIÇÃO ESPECTRAL

As propriedades básicas da teoria de wavelets são o deslocamento e escalonamento:

$$\psi_{a,b}(t) := \frac{1}{\sqrt{|a|}} \cdot \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), a \neq 0. \quad (14)$$

Aplicando o escalonamento $a=2$ na representação mostrada em (1) para a wavelet-mãe, obtém-se:

$$e(2t) \cdot \cos[2\pi \cdot (f_M + f_m)t + \theta(2t)] = \text{Re}\{S_b(2t) \cdot e^{j2\pi \cdot (f_M + f_m)t}\} \quad (15)$$

Vê-se que, enquanto a frequência é multiplicada por a , (para $a=2^k$, k inteiro, na escala diádica), o sinal complexo em banda básica também é escalonado na mesma proporção, alterando sua banda. Esta maneira de interpretar a mudança de escala da wavelet conduz naturalmente à análise com Q-constante. A formatação da curva (shape) depende da wavelet, porém para os propósitos de superposição, isto é completamente irrelevante. Basta ater-se aos limites do suporte do sinal, coisa similar ao que ocorre no teorema da amostragem. Por inspeção na Fig. 8, tal como ocorre na demonstração usual do Teorema da Amostragem de Shannon-Nyquist-Kotel'nikov [8], encontra-se uma condição para garantir que não há superposição espectral (aliasing, no caso de amostragem).

Impondo $w_m \geq \pi B$ (ou, identicamente $w_0 - 2\pi B / 2 \geq \pi B$), chega-se a: $f_M \leq 3f_m$. Caso contrário, ocorre superposição espectral na faixa $(f_m, \frac{f_M - f_m}{2})$. Por exemplo, para a wavelet de Meyer, a superposição ocorre no intervalo $(\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3})$. Já para a wavelet de Shannon, não há superposição e a análise é naturalmente ortogonal. Este resultado pode ser sumarizado na Proposição 1 a seguir.

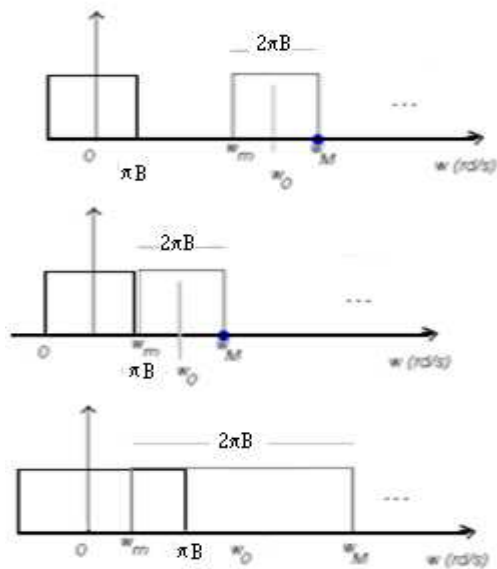


Fig.8: Análise da superposição espectral na análise. Há três casos, a saber: a) $w_M > 3w_m$ não há superposição espectral, b) Representa o caso limite $w_M = 3w_m$, e c) $w_M < 3w_m$ ocorre superposição espectral na faixa $(w_m, \frac{w_M - w_m}{2})$.

PROPOSIÇÃO 1. Uma wavelet-mãe contínua cujo espectro é essencialmente confinado (suporte efetivo) na banda $[f_m, f_M]$, realiza uma análise ortogonal provido que $f_M \leq 3f_m$.

O resultado acima exibe um simples teste para análise ortogonal. De certo modo, lembra o critério de Nyquist. Resultados desse tipo estão na linha de pensamento *Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem* [G. Occam]. Para avaliar uma condição de ortogonalidade entre as análises em diferentes escalas, constrói-se o banco de filtros resultando na Fig. 9, por escalonamentos sucessivos diádicos. Para facilitar, esboçou-se um caso sem superposição espectral.

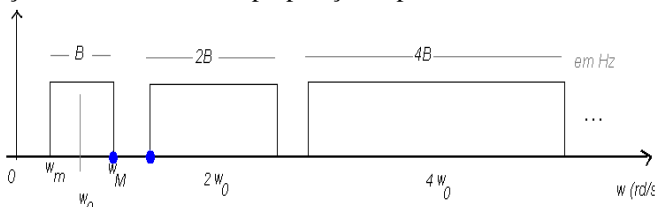


Fig.9: Análise diádica com Q-constante com banco de filtros. A banda B referenciada na figura é $2\pi B = w_M - w_m$ (em rd/s).

Tomando alguns exemplos de wavelets contínuas conhecidas, verifica-se como ilustração, a condição da proposição anterior. Para a wavelet de Shannon, a Fig. 10 mostra como a análise é realizada. A ortogonalidade das saídas dos filtros decorre diretamente do Teorema de Parseval-Plancherel [15].

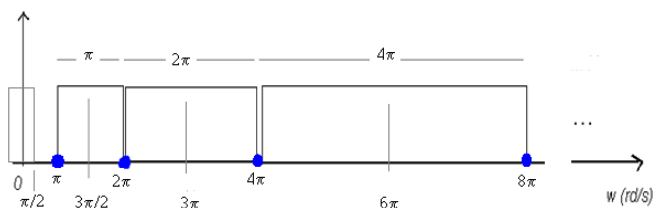


Fig.10: Banco de filtros ortogonais diádicos a Q-constante na análise com wavelet de Shannon. Não há superposição espectral.

Vale também salientar que a ortogonalidade estabelecida aqui funciona como aquela obtida em sistemas FDM [4]. Melhor resultado (wavelets mais compactas no tempo) pode ser

encontrado, como ocorre nos sistemas OFDM [16-18], nos quais, apesar de existir uma superposição, a condição de ortogonalidade entre os canais continua sendo verificada. Esta é uma razão para acreditar que a condição encontrada é apenas suficiente. Para a wavelet de Meyer, o banco de filtros é mostrado na Fig. 11, porém nota-se a superposição espectral na faixa $[4\pi/3, 8\pi/3]$. A função é escolhida de tal modo que a combinação das componentes superpostas corresponda a uma análise adequada.

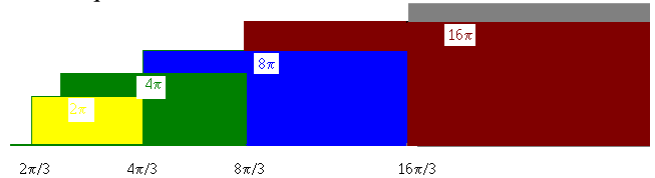


Fig.11: Banco de filtros ortogonais diádicos a Q-constante na análise com wavelet de Meyer. Apesar da superposição espectral, a análise é realizada corretamente.

TABELA I: FAIXAS ESPECTRAIS NA ANÁLISE COM BANCO DE FILTROS DE MEYER.

Frequência referência (assimétrica)	Faixa espectral (superposição)	Banda	Faixa espectral (banco FDM)	Banda
$4\pi/3$	$[2\pi/3, 8\pi/3]$	2π	$[4\pi/3, 8\pi/3]$	$4\pi/3$
$8\pi/3$	$[4\pi/3, 16\pi/3]$	4π	$[8\pi/3, 16\pi/3]$	$8\pi/3$
$16\pi/3$	$[8\pi/3, 32\pi/3]$	8π	$[16\pi/3, 32\pi/3]$	$16\pi/3$
$32\pi/3$	$[16\pi/3, 64\pi/3]$	16π	$[32\pi/3, 64\pi/3]$	$32\pi/3$
...

Note que ocorre a superposição entre o termo $\cos(\cdot)$ e um $\sin(\cdot)$ escalonado. Mas as expressões da wavelet de Meyer já incluem diferentes escalas para os dois termos cossenoidais na (11). Isto resulta na expressão abaixo:

$$\Psi(w) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{cas} \left[\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3|w|}{4\pi} - 1 \right) \right] e^{-jw/2} & 4\pi/3 \leq |w| \leq 8\pi/3 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (16)$$

em que $\text{cas}(x) := \cos(x) + \sin(x)$ é a função cassoidal de Hartley. O espectro correspondente é mostrado na Fig. 12 a seguir. A wavelet correspondente é mostrada em Fig. 13.

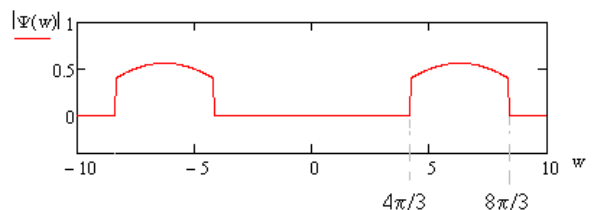


Fig.12: Análise resultante para o banco de filtros de Meyer, levando em conta a superposição espectral dos filtros laterais do banco.

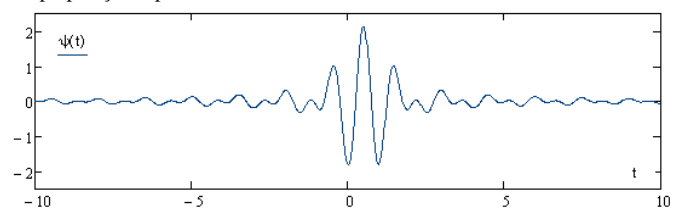


Fig.13: Wavelet “equivalente” de Meyer, levando em conta os efeitos da superposição das escalas adjacentes.

Análise similar para a wavelet de *de Oliveira* conduz aos resultados apresentados na Tabela II. Note que as faixas em que há superposição de espectros entre bancos adjacentes é entre $[2\pi(1 - \alpha), 2\pi(1 + \alpha)]$, e a largura da superposição é de $4\pi\alpha$. O espectro correspondente é esboçado na Fig. 14.

TABELA II: FAIXAS ESPECTRAIS NA ANÁLISE COM BANCO DE FILTROS DE *de OLIVEIRA*.

Faixa espectral (superposição)	Banda
$[\pi(1 - \alpha), 2\pi(1 + \alpha)]$	$(1 + 3\alpha)\pi$
$[2\pi(1 - \alpha), 4\pi(1 + \alpha)]$	$(1 + 3\alpha)2\pi$
$[4\pi(1 - \alpha), 8\pi(1 + \alpha)]$	$(1 + 3\alpha)4\pi$
...	
Faixa espectral (banco FDM)	Banda
$[\pi(1 + \alpha), 2\pi(1 + \alpha)]$	$(1 + \alpha)\pi$
$[2\pi(1 + \alpha), 4\pi(1 + \alpha)]$	$(1 + \alpha)2\pi$
$[4\pi(1 + \alpha), 8\pi(1 + \alpha)]$	$(1 + \alpha)4\pi$
...	

Note que ocorre uma superposição entre o termo $\cos(\cdot)$ e um $\cos(\cdot)$ escalonado. Mas, as expressões da wavelet já incluem diferentes escalas para os dois termos em (14), resultando na expressão abaixo:

$$\Psi(w) = \begin{cases} 0 & |w| \leq \pi(1 + \alpha) \\ \frac{2}{\sqrt{2\pi}} & \pi(1 + \alpha) \leq |w| \leq 2\pi(1 - \alpha) \\ \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cos\left[\frac{1}{8\alpha}(|w| - 2\pi(1 - \alpha))\right] & 2\pi(1 - \alpha) \leq |w| \leq 2\pi(1 + \alpha) \\ 0 & |w| \geq 2\pi(1 - \alpha) \end{cases} \quad (17)$$

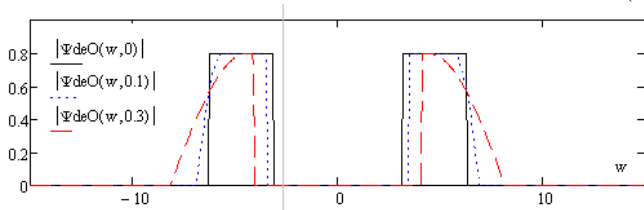


Fig.14: Análise resultante para o banco de filtros de *de Oliveira*, levando em conta a superposição espectral dos filtros laterais do banco.

Na Fig. 15, são esboçadas as formas de onda de wavelets com diferentes fatores de rolamento, correspondentes à análise por banco de filtros de formato mostrado na Fig. 14.

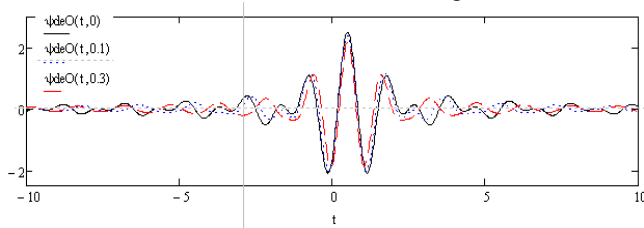


Fig.15: Wavelet real “equivalente” de *de Oliveira*, levando em conta os efeitos da superposição das escalas adjacentes. Três valores de fator de rolamento: $\alpha=0, 0,1$ e $0,3$.

IV. CONCLUSÕES

Expressões analíticas para uma representação de sinais passa faixa usando um sinal em banda básica são de ampla utilidade em análises de sistemas de telecomunicações. O procedimento para determinar as flutuações dos processos de envelope e fase de uma wavelet foi introduzido e ilustrado através de exemplos de wavelets contínuas particulares, inclusive uma wavelet de Daubechies (db4). A despeito da interpretação de wavelets como banco de filtro com fator de qualidade constante ser antiga, o enfoque introduzido aqui pode auxiliar a melhor entender os mecanismos envolvidos. Investigando-se as condições para garantir uma não superposição espectral (na mesma linha que o Teorema da Amostragem), chega-se a uma condição suficiente sobre o espectro da wavelet-mãe para garantir a ortogonalidade espectral do banco de filtros da análise. Surpreendentemente, as wavelets ortogonais que resultam em banco de filtros em que há alguma superposição induzem uma análise “equivalente”, com um banco de filtros ortogonal sem superposição espectral. A ideia foi combinar (princípio da superposição) as regiões comuns do espectro dos filtros adjacentes. Como trabalho futuro, propõe-se investigar com as ferramentas desenvolvidas neste trabalho sistemas wavelet tipo DWT-OFDM [16].

REFERÊNCIAS

- [1] H.M. de Oliveira, *Análise de Sinais para Engenheiros: Uma Abordagem via Wavelets*, Editora Brasport, Rio de Janeiro, 2007.
- [2] S.G. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, 1999.
- [3] M. Vetterli, *Wavelets and Subband Coding*, Prentice-Hall, 1995.
- [4] H. M. de Oliveira. *Fundamentos de Engenharia de Telecomunicações*, disponível [freedownload openlibrary](http://freedownload.openlibrary.org), 2013.
- [5] S. Haykin, M. Moher, *Communication Systems*, 5th Ed., Wiley, 2009.
- [6] H. Taub and D. L. Schilling, *Principles of Communication Systems*, 2nd Ed. McGraw-Hill, 1986.
- [7] V. A. Kotel'nikov, On the transmission capacity of the ether and of cables in electrical communications, In: *Proc. of the first All-Union Conference on the technological reconstruction of the communications sector and low-current engineering*, Moscow, 1933. translation @ <http://ict.open.ac.uk/classics>
- [8] C. Bissell, The sampling Theorem, *IET Communications Engineer*, vol.5(3), p.39, 2007.
- [9] C.S. Burrus, R.A. Gopinath, H. Guo, *Introduction to Wavelets and the Wavelet Transform--A Primer*. Prentice-Hall, NJ, 1998.
- [10] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs*, Hermann, Paris, 1990.
- [11] H.M. de Oliveira, L.R. Soares and T.H. Falk, A Family of Wavelets and a New Orthogonal Multiresolution Analysis Based on the Nyquist Criterion, *J. of the Brazilian Telecomm. Soc.*, vol. 18,pp.69-76, 2003.
- [12] D. Slepian, On bandwidth, *Proceedings of the IEEE*, March, 1976, vol.64, pp.292-300.
- [13] J. Dattorro, *Filterbank Implementation of Meyer's wavelet*, EE Project (course EE392G), Stanford University, June, 1998.
- [14] V. Vermehren V., J.E. Wesen, H. M. de Oliveira, Close Approximations for Daubechies and their Spectra, *IEEE/SBTr International Telecommunication Symposium, ITS 2010*, Manaus – AM , Brazil.
- [15] H.M. de Oliveira, *Análise de Fourier e Wavelets: sinais estacionários e não estacionários* Ed. Universitária UFPE, 1ª Ed, Recife 1, 343p.
- [16] D. Gupta et al., Performance Analysis of DFT-OFDM, DCT-OFDM, and DWT-OFDM Systems in AWGN Channel, *Fourth Int. Conf. on Wireless and Mobile Communications*, Athens, Greece, 2008.
- [17] A.N. Akansu, X. Lin, A Comparative Performance Evaluation of DMT (OFDM) and DWMT based DSL Communication Systems for Single and Multitone Interference, *Proc. of IEEE Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Process.*, ICASSP, v.6,pp.3269-3272, 1998.
- [18] A.R. Lindsey, Wavelet packet Modulation for Orthogonally Multiplexed Communication, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol.45, May, 1997, pp.1336-1339.