ANÁLISE ESPECTRAL DE SINAIS:
UMA VISÃO DE ENSINO VOLTADA À ENGENHARIA

Por H. Magalhães de Oliveira e P. F. de Santa Clara Ramos Jr.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE ELETRÔNICA & SISTEMAS
CODEC- Grupo de Comunicações,
C.P. 7800, 50.711-970 Recife-PE

RESUMO

O fato de cursos introdutórios em Engenharia Elétrica e outras engenharias, tais como Sistemas Lineares, Sinais e Sistemas, não possuirem Laboratórios associados e serem ministrados por matemáticos, desestimula muitos estudantes de graduação. Como conseqüência, muitos deles não compreendem o significado de certas aplicações da Matemática (e.g., análise de Fourier) na Engenharia e passam a apresentar rejeição pelo emprego de um ferramental tão útil. O problema é essencialmente de **enfoque e exemplos**. Uma proposta para atenuar estas dificuldades consiste em desenvolver um *software* didático no intuito de estimular, aumentar a motivação e o interesse dos estudantes, bem como auxiliar na fixação dos conceitos envolvidos. O aplicativo FOURIER/UFPE desenvolvido é constituído por diversos programas escritos na versão **Turbo Pascal** 7.0 da Bordland International™, com recursos de linguagem orientada a objeto (*Turbo Vision*), para funcionar em PC's no ambiente DOS. Apresentam-se animações gráficas que ilustram certos aspectos da análise espectral, tais como a passagem da série para a transformada de Fourier, efeitos de compressão-expansão nos dois domínios, etc. Apresentam-se também, através de provas alternativas, alguns resultados relativos à relação tempo-freqüência e a estabilidade de redes lineares (filtros), mostrando como abordá-los ao nível de ensino de graduação. Para introduzir instrumentos como o analisador de espectro, faz-se uma comparação com um prisma óptico. Finalmente, constata-se a necessidade de modernizar os cursos, introduzindo mesmo de maneira superficial, técnicas para análise espectral adequadas a sinais não-estacionários. Como tratar estas técnicas mais sofisticadas do que a Transformada de Fourier, num curso de Engenharia? Sugere-se aqui uma primeira abordagem sobre a Transformada de Gabor e Wavelets (*ondelettes*), do modo mais simples possível, que permita transmitir o significado e o *por quê* destas ferramentas.

---

e-mail : 69HMO@NPD1.UFPE.BR, fone : +(081) 2718210, fax : +(081) 2718215

NOTA-O *software* FOURIER/UFPE é de domínio público. Interessados em adquiri-lo, contactar o autor.

1. FUNDAMENTOS DA ANÁLISE ESPECTRAL

Em nenhuma disciplina básica (Matemática) o enfoque para a análise de Fourier é a análise de sinais. Para introduzir-se a noção de espectro, ao invés de se iniciar pela definição da Transformada, poder-se-ia procurar ganhar algum "sentimento" através de noções sobre o analisador de espectro (SPE&WOR 93). O objetivo é obter sucesso numa melhor compreensão dos significados dos conceitos de freqüência, séries de Fourier, espectro, representações e relações nos domínios temporal e freqüêncial etc. Adota-se o símbolo := para "igual por definição". A representação da Transformada de Fourier sob a forma operacional (não pela definição, mas por um método de cálculo) através de um banco de filtros banda estreita passa-faixa é bastante útil. Os estudantes são encorajados a visualizarem *algo mais* que a definição matemática "Integral de Fourier". Esta representação é útil para interpretar a transformada *wavelets* (RIO&VET 91).

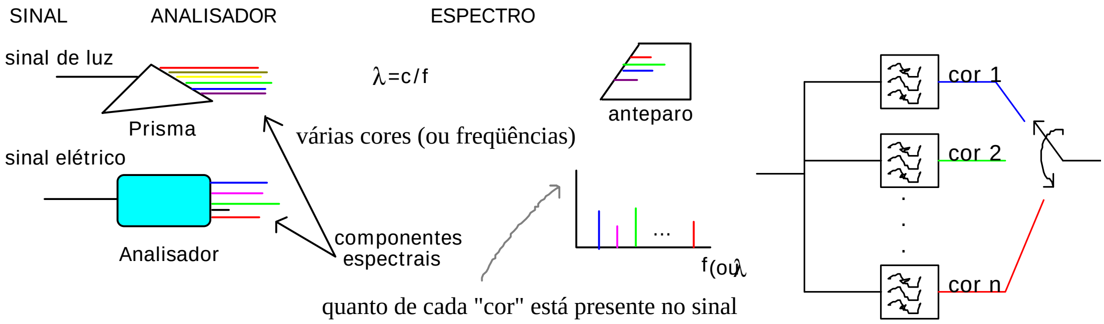

Fig.1- Princípio do Analisador de Espectro: Comparação com decomposição da luz

O FOURIERS é um *pacote de software* didático, desenvolvido basicamente para ser utilizado por estudantes de cursos de gradução em engenharia, em disiplinas que abordem a Análise de Fourier em caráter introdutório. O aplicativo requer apenas conhecimento básico de programação e microinformática, além da orientação e ênfase do professor com relação aos diversos aspectos envolvendo a fundamentação teórica do assunto. Através da utilização do programa SLIDES.EXE, professores e alunos podem realizar ainda seminários ou exposições informais, ilustrando de maneira eficiente a teoria tratada em sala de aula. Pode-se também generalizar o uso do aplicativo em situações onde requer-se estudos de natureza qualitativa de sinais, no escopo da Análise espectral.

FOURIERS/UFPE foi originalmente concebido para uso no ensino de disciplinas ilustrando tópicos relacionados à análise de Fourier, tais como: decomposição em séries, escolha dos intervalos de integração, truncamentos, convergência, Fenômeno de Gibbs e disposição de raias espectrais. O aplicativo completo é dividido em três programas: SIGNAL.EXE, FOURIERS.EXE e SLIDES.EXE.

2. F(ζ) *vs.* F(w) OU A DIALÉTICA DA MATEMÁTICA *vs.* ENGENHARIA

A transformada de Fourier de um sinal real f(t), $-\infty<t<+\infty$ é formalmente definida por $F(z) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(-jzt)dt$, se a integral imprópria existe. Para o professor de Matemática, ζ é uma variável muda; para o Engenheiro, w tem interpretação inequívoca (MAN 81).

Funções no espaço $\pounds^2$ (FIG 77) são simplesmente interpretadas como **sinais elétricos** (em tensão ou corrente) de energia finita, calculando-se a energia dissipada através de um resistor padrão, i.e., $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt < \infty$.

A motivação tradicional consiste na passagem da série à transformada de Fourier. Sinais aperiódicos podem ser encarados como funções periódicas onde o período de repetição crece *ad infinitum*. Considera-se então um período T finito (c.f. Fig. 2). Assim, com $w_0 := 2\pi / T$, vale a representação em série dentro do intervalo especificado,

$$f(t) \approx \sum_{-\infty}^{+\infty} F_n \exp(jnw_0 t)$$

Aumentando-se T, observa-se no espectro obtido os efeitos da diminuição do espaçamento entre raias bem como o aumento no número de linhas espectrais (i.e., aumento da densidade de raias), enquanto as amplitudes do espectro discreto tendem a zero, ou seja, os coeficientes de Fourier anulam-se: $\lim_{T\to+\infty} |F_n| = 0$.

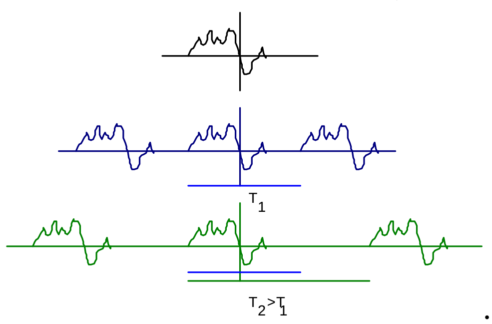

Fig. 2- Sinais aperiódicos vistos como periódicos com período crecente *ad infinitum*.

O espectro descontínuo $F(nw_0) := TF_n$ é definido para as freqüências $0, w_0$, $2w_0, 3w_0, \ldots$. Assim, $\Delta w=(n+1)w_0 - nw_0$, e quando $T \to +\infty$, tem-se $\Delta w \to 0$. No limite, em vez de harmônicos discretos, as freqüências presentes assumem qualquer valor na reta. Os valores de $n\Delta w$ são substituídos por w variando na reta real.

Define-se então $F(w) = \lim_{T \to +\infty} F_n T = \lim_{T \to +\infty} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\exp(-jwt)dt$ de modo que a definição matemática clássica corresponde ao espectro de um sinal aperiódico. O produto do coeficiente de Fourier por T corresponde a uma simples mudança de escala necessária para visualizar o espectro adequadamente. Trata-se de um *zoom*. Desta forma, procura-se também interpretar F(w) como um conjunto de coeficientes de Fourier indexado no *continuum.*

3. *SOFTWARE* DIDÁTICO PARA ANÁLISE DE FOURIER

O programa SIGNAL.EXE é uma espécie de programa base, sendo responsável pela geração da função a ser analisada, bem como de subprogramas essenciais para o funcionamento do sistema. Inicialmente, o programa solicita ao usuário a definição da função, que é feita obedecendo à sintaxe de declarações de funções do *Turbo Pascal* 7.0. Deste modo, o sinal a ser analisado pode conter não somente expressões matemáticas e outras funções pré-definidas no *Turbo Pascal*, mas também laços (e.g., FOR, WHILE etc.), condicionais (e.g., IF, CASE) e ainda, sub-rotinas dentro da própria função declarada. A seguir, de posse da função declarada, gera-se, com auxílio do compilador em linha de comando do Turbo Pascal, suas bibliotecas convencionais e duas outras bibliotecas (FUNC.PAS e FOURLIB.PAS) e um programa executável, FOURIERS.EXE. Este, por sua vez, apresenta um ambiente de trabalho típico de aplicativos construidos com os recursos *Turbo Vision*. Neste programa, encontram-se as rotinas e ferramentas necessárias à análise espectral. Ao executar-se o programa FOURIERS, encontra-se um *menu* com rotinas para o estudo do sinal caracterizado anteriormente através de SIGNAL.EXE. Um dos tópicos do *menu*, chamado "*Coefficients*", é constituido de rotinas com parâmetros para cálculo dos coeficientes de Fourier (i.e, número de termos da série, intervalo de integração e precisão das integrais) e armazenamento destes coeficientes em disco (arquivo tipo texto). Um outro tópico denominado "*Picture*", permite ao usuário selecionar e observar, via monitor, imagens gráficas; no domínio temporal, que podem conter o sinal analisado e sua síntese (segundo o grau de truncamento da série); ou ainda, no domínio freqüencial, com a disposição das raias espectrais. As imagens gráficas são mostradas em cores, com resolução VGA (640*x*480), facilidades de *zoom* e mudança de escala dos eixos cartesianos são também incluidas. O programa FOURIERS.EXE permite ainda digitalizar as imagens gráficas e gravá-las sob a forma de arquivos binários em disco, podendo ser consultadas posteriormente através do programa SLIDES.EXE.

3.1 A exposição de *Slides*

Uma vez digitalizadas e gravadas em disco, as imagens descritas anteriormente podem ser recuperadas utilizando-se SLIDES.EXE. Este programa, também implementado com os recursos do *Turbo Vision*, lê os arquivos de imagem selecionados pelo usuário, exibindo-os novamente na tela do monitor. Além de visualizar imagens uma a uma, o programa possui um editor de texto próprio, com facilidades de edição (recortar, copiar e colar blocos), pesquisa e substituição de palavras e disposição de múltiplas janelas. Através deste editor, pode-se elaborar arquivos tipo texto convencionais (ASCII), contendo uma seqüência de descrição de localização de arquivos de imagem digitalizada quaisquer, escolhidos pelo usuário. A cada arquivo texto deste tipo, dá-se o nome "*carrossel*", gravado em disco usualmente com extensão *.CAR. Após a edição e gravação de um carrossel, é possível habilitar através do tópico *Run*, no *menu* do programa, o modo de exposição de múltiplos *slides* (múltiplos arquivos de imagens digitalizadas), selecionando um dos arquivos *.CAR. Os *slides* serão, desta forma, mostrados no monitor na seqüência definida no arquivo *.CAR e permanecerão na tela até que o usuário pressione o botão esquerdo do *mouse*, quando será exibida a imagem seguinte. Se houver a necessidade de interromper a seqüência a qualquer momento antes da exposição do último arquivo de imagem, pode-se pressionar o botão direito do *mouse*. O programa SLIDES possui como recursos adicionais, facilidades de mudança de diretório de trabalho e saída temporária para o DOS ("*DOS Shell*").

3.2 Animações Gráficas Ilustrando a Análise Espectral

O raciocínio utilizado para introduzir informalmente a transformada de Fourier $\mathcal{F}$ pode ser bem ilustrado referindo-se a um exemplo particular, onde avalia-se o espectro de uma porta de duração τ seg.

$$\Pi(t/t) := \begin{cases} 1 & |t| < t/2 \\ 0 & |t| \geq t/2 \end{cases}.$$

Para este exemplo (função porta), a expansão em série exponencial de Fourier, admitindo-se um período T, resulta em:

$f(t) \approx \sum_{-\infty}^{+\infty} d\,\mathrm{Sa}(n\pi d)\exp(jn\frac{2\pi}{T}t), \quad |t| < T/2,$ sendo Sa(x):=sen(x)/x a função amostral. O número de linhas espectrais antes da freqüência $B=1/\tau$ Hz (correspondente ao primeiro zero) é $\lfloor T/\tau \rfloor = \lfloor 1/d \rfloor$, onde $\lfloor x \rfloor$ (*floor*) representa o maior inteiro menor que x. O espaçamento entre raias consecutivas é $1/T=d/\tau \to 0$.

Ao tomar-se o limite $T \to \infty$, os efeitos no espectro discreto são os seguinte:

a) Diminuição no espaçamento entre raias

b) Aumento no número de linhas espectrais por trecho de freqüências (densidade)

c) As amplitudes do espectro tendem a zero.

A implementação para observação visual destes efeitos é realizada empregando o carrossel, mostrando uma animação gráfica com estes três efeitos, inicialmente sem reescalonar o espectro (*zoom*) e posteriormente multiplicando os coeficientes (amplitudes das raias) por um ganho T que aumenta.

O efeito de que a *compressão em um domínio implica numa expansão no outro* é também observado através de uma animação gráfica, considerando um sinal porta.

4. ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES SOBRE SINAIS E SISTEMAS LINEARES

Uma das relações importantes tempo-freqüência é conhecida como a relação de incerteza de Gabor ($\Delta f\ \Delta t > 1/4\pi$, princípio da Incerteza de Gabor-Heisenberg). Em particular, um sinal não pode ser **simultaneamente** t-limitado e f-limitado (GAB 46), (MAN 81).

Uma das proposições comumente citadas em cursos envolvendo sinais, quase sempre sem prova, é comentada a seguir (SLE 76).

<u>*PROPOSIÇÃO*</u>: Sinais determinísticos não podem ser simultaneamente limitados no tempo e na freqüência. (deO 95) ◊

<u>Esboço da Prova.</u> Um sinal f(t) estritamente limitado na freqüência, banda limitada em w_m, pode ser escrito sob a forma

$f(t) = \frac{1}{2p}\int_{-w_m}^{+w_m} F(w)\exp(jwt)dw$, onde F(w) representa o seu espectro, suposto existente.

A demonstração é feita por *reductio ad absurdum*:

Suponha que f(t) é também estritamente limitada no tempo. Isto significa que $\Pi(t/t) := \begin{cases} 1 & |t| < t/2 \\ 0 & |t| > t/2 \end{cases}$. Obviamente, $f(t)=f(t)\Pi(t/2t_m)$. Logo, pela propriedade da convolução na freqüência da Transformada de Fourier, segue-se que $F(w)=(2\pi)^{-1} F(w)*2t_m Sa(wt_m)$. Claramente, $F(w)*Sa(wt_m) \neq 0$, $-\infty<w<+\infty$ (ainda que eventualmente possa anular-se pontualmente). A convolução acima resulta em um sinal F(w) que <u>**não**</u> é estritamente limitado em banda, o que contradiz a hipótese. Q.E.D.

Uma característica importante de sistemas lineares concerne a sua estabilidade. Normalmente, embora a condição sob a integrabilidade absoluta da resposta impulsional seja descrita nos textos, a vasta maioria demonstra apenas a suficiência, não apresentando prova sobre a necessidade. No que se segue, uma prova alternativa simples é fornecida que pode ser compreendida facilmente por estudantes de graduação (deO 95). Denotando sgn(x) a função sinal, sgn(x):=-1 se x<0 e sgn(x):=+1 se x>0, tem-se:

<u>*TEOREMA*</u> (*Estabilidade*). Uma rede linear invariante é estável se e só se a sua resposta impulsional é absolutamente integrável. ◊

<u>Prova.</u> Suficiência ($\Leftarrow$). Decorre da desigualdade de Cauchy-Schwartz para integrais.

Necessidade ($\Rightarrow$). Admitindo que o sistema é estável, qualquer excitação limitada f(t) possui resposta também limitada. Em particular, a saída para uma excitação limitada f(t)=sgn[h(-t)] é limitada, i.e.,

$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{h}(t)\,\mathrm{sgn}[\mathrm{h}(t-\mathrm{t})]\,\mathrm{d}t\right| < +\infty$. Avaliando-se a expressão no instante particular t=0, e levando-se em consideração o fato que $\mathrm{h}(\tau)\mathrm{sgn}[\mathrm{h}(\tau)] = |\mathrm{h}(\tau)|$, segue-se que

$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathrm{h}(t)|\,\mathrm{d}t\right| = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathrm{h}(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty$. Q.E.D.

5. ANÁLISE ESPECTRAL PARA SINAIS NÃO-ESTACIONÁRIOS

Transformada de Gabor e Wavelets

A Transformada clássica de Fourier inclui implicitamente uma hipótese sobre a estacionaridade dos sinais. Uma análise espectral adequada aos sinais não estacionários requer mais do que a transformada F, e requer a introdução de uma dependência no tempo na análise de Fourier, se possível, preservando a linearidade. Os sinais devem ser tratados não no domínio t ou domínio f, mas em ambos (espaço conjunto tempo-freqüência)! A questão fundamental é: "*como apresentar aos estudantes de engenharia, noções sobre a análise espectral de sinais não estacionários*?". A discussão a seguir, pouco rigorosa, procura apenas **despertar interesse e introduzir conceitos**.

A idéia da Transformada de Fourier de curta duração STFT (ou Transformada de Gabor, ou Transformada de tempo curto) é introduzir um parâmetro de freqüência local (local no tempo) como se a "*Transformada de Fourier Local*" observasse o sinal através de uma curta "janela" dentro da qual o sinal permanece aproximadamente estacionário. Necessita-se agora de uma representação bidimensional F(t,w) do sinal f(t), composta por características espectrais dependentes do tempo.

A transformada local observa f(t) "através" de uma janela W(t) centrada no instante de tempo τ e de extensão "limitada", antes do cálculo do espectro. Formalmente,

$$\mathrm{STFT}(t, \mathrm{w}) := \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f(t)}\,\mathrm{W}^*(\mathrm{t}-t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{jwt}}\,\mathrm{dt}$$

Existem diversas escolhas para a janela, sendo a mais comum uma janela Gaussiana. O detalhe mais importante é que uma vez fixada a janela para a STFT, a resolução no tempo e na freqüência Δf e Δt permanece constante em todo o plano t-f.

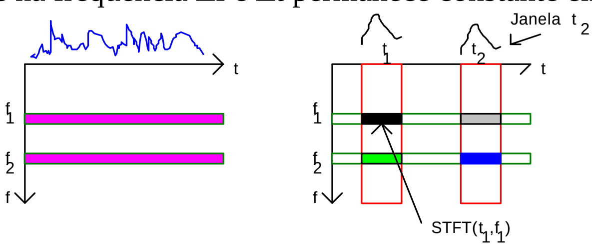

Fig. 4 - Análise espectral com Transformada de Fourier clássica e em tempo curto.

Uma outra alternativa para abordar o problema no *plano conjunto tempo-freqüência* consiste em permitir uma resolução variável no tempo. Intuitivamente, quando a análise é visualizada como um banco de filtros, a resolução no tempo deveria aumentar com o aumento da freqüência central dos filtros. Mantendo-se $\Delta f/f$=cte, a análise é realizada através de um banco de filtros compostos por passa-faixas com banda passante relativa constante (ou fator de qualidade Q constante). Agora, para Q constante, vê-se que as resoluções Δt e Δf mudam com a freqüência central, satisfazendo ainda o princípio da Incerteza de Gabor-Heisenberg. A resolução no tempo torna-se arbitrariamente boa para altas freqüências, enquanto que a resolução em freqüência torna-se arbitrariamente boa em baixas freqüências. A figura abaixo explicita este comportamento (RIO&VET 91).

Na Transformada Wavelet contínua CWT, todas as respostas ao impulso no *banco de filtros* são versões escalonadas (expandidas ou comprimidas) de uma mesma h(t), chamada de Wavelet básica. Assim,

$$\mathrm{CWT}(t,a) := \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, h^{*}\left(\frac{t - t}{a}\right) dt \,.$$

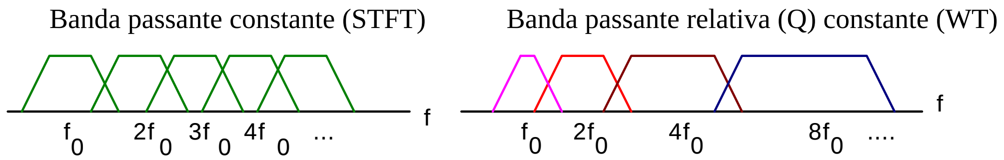

Fig. 4 - Análise Espectral com banco de Filtros- STFT e WT.

6. CONCLUSÕES

A análise no domínio freqüêncial tem vasta aplicação em Engenharia. O primeiro contato dos estudantes com a série e transformada de Fourier dá-se normalmente em cursos de caráter estritamente matemático. O intuito deste artigo é essencialmente discutir diversos aspectos da análise espectral, sempre procurando enfatizar analogias, ilustrações, interpretações e demonstrações facilmente compreensíveis para estudantes de Engenharia.

Descrevem-se aplicações do *Software* FOURIER que permitam ilustrar relações da análise de Fourier através de animações gráficas. Este "pacote" para fins didáticos na área introdutória da Análise de Fourier, utiliza recursos que facilitam sua operação, permitindo também otimizações posteriores, inclusive por parte dos alunos. O programa pode ser empregado no ensino de Engenharia Eletrônica, outra Engenharias, Física e Matemática, em cursos de graduação. Tendo em vista que o *software* desenvolvido é de natureza simples, e sendo o PASCAL uma linguagem amplamente difundida em cursos de engenharia, é perfeitamente factível que futuras versões deste aplicativo possam incorporar sugestões provenientes dos própios alunos, o que pode servir de estímulo adicional para o aprendizado e participação dos mesmos. Dentre as possíveis otimizações, poder-se-ia incluir: Uso de algoritmos rápidos para o cálculo do espectro, técnicas de compactação e tratamento de imagem, sistemas de tratamento de erros de I/O e elaboração de rotinas que permitam a geração de funções dentro do próprio programa principal, em tempo de execução, simplificando sua operação.

Um dos problemas interessantes neste estudo é relativo a manipulação de sinais de duração finita e/ou sinais banda limitada. Textos básicos de engenharia descrevendo análise espectral (telecomunicações, processamento de sinais etc) freqüentemente comentam a inexistência de sinais simultaneamente limitados em tempo e freqüência. O argumento mostrado na sec. 4 ilustra, de maneira acessível, tal fato. A discussão deve entretanto ser complementada com o excelente artigo (SLE 76).

Procura-se enfatizar o enfoque da análise espectral, inclusive propondo incluir no conteúdo programático, noções sobre ferramentas mais sofisticadas que permitam a análise espectral de sinais não-estacionários. Trata-se, portanto, de uma *vox clamantis* conclamando os docentes que lidam com análise espectral em engenharia a introduzirem os fundamentos de transformadas tempo-freqüência como STFT e WT.

BIBLIOGRAFIA E REFERÊNCIAS SELECIONADAS

(SPE&WOR 93)- R. R. Spencer and G. Worstell, "A Spectrum Analyser Laboratory Project", *IEEE Trans. on Education*, **36**,n.3,Aug.,1993,pp.301-306.

(RIO&VET 91)- O. Rioul and M. Vetterli, "Wavelets and Signal Processing", *IEEE Signal Processing Mag.*,Oct., 1991,pp.14-37.

(MAN 81)- J. M. Manley, "The Concept of Frequency in Linear System Analysis", *IEEE Comm. Mag.*, 1981, pp.26-34.

(FIG 77)- D. G. de Figueiredo, "*Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*", RJ: IMPA-CNPq,1977.

(GAB 46)- D. Gabor, "Theory of Communications", *J. of the IEE*, **9**,3rd part, n.26,1946, pp.429-457.

(SLE 76)- D. Slepian, "On Bandwidth", *Proc. of the IEEE*, **64**,n.3,Mar.,1976,pp.292-300.

(deO 95)- H. Magalhães de Oliveira, "*Fundamentos de Engenharia de Telecomuni-cações*", Notas de curso e Exercícios,1995,470pp., Pub. Interna DES-UFPE.

(BOA 92)- B. Boashash, "Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of a Signal - part I: Fundamentals", *Proc. of the IEEE*, **80**,n.4,April,1992,pp.520-538.