Decodificação de Sinais DTMF via Transformada Aritmética de Fourier

J. B. Lima, R. M. Campello de Souza, H. M. de Oliveira e M. M. Campello de Souza

Resumo – **Neste artigo, um novo método para a decodificação de sinais DTMF é proposto. O procedimento é baseado na Transformada Aritmética de Fourier e é mais eficiente, em termos de complexidade computacional, do que as técnicas usualmente utilizadas. São discutidos aspectos teóricos e fatores que influenciam a eficácia, a precisão e a complexidade do método proposto.**

Palavras-chave – **DTMF, Transformada Discreta de Fourier, Transformada Aritmética de Fourier, algoritmos rápidos, complexidade computacional.**

Abstract – **In this paper, a new method for the decoding of DTMF signals is proposed. The approach, which applies the Arithmetic Fourier Transform, is more efficient, in terms of computational complexity, than existing techniques. Theoretical aspects and features that determine the accuracy and the complexity of the proposed method are discussed.**

Index Terms – **DTMF, Discrete Fourier Transform, Arithmetic Fourier Transform, fast algorithms, computational complexity.**

I. INTRODUÇÃO

Em 1903, H. Bruns [1] desenvolveu um método para o cálculo dos coeficientes da Série de Fourier de um sinal usando a fórmula de inversão de Möbius. Nesta técnica, posteriormente denominada Transformada Aritmética de Fourier (AFT) [2], há multiplicações apenas por {-1, 0, 1} e possíveis fatores de escalonamento. Em 1988, Tufts e Sadasiv [3] "redescobriram" um algoritmo parecido com o original de Bruns e o introduziram na Engenharia. Entretanto, havia a restrição de se admitir apenas sinais pares. Tal limitação foi removida em 1990 por Tufts e Reed [4]. Em 1992, Reed e Shih [5] refinaram o algoritmo anterior e propuseram a AFT Simplificada, que envolve um cálculo mais balanceado dos coeficientes pares e ímpares.

Neste artigo, é apresentada uma aplicação do algoritmo proposto por Reed e Shih: a decodificação de sinais DTMF (*Dual-Tone Multi-Frequency*). Além de sugerir uma implementação com processamento paralelo, a AFT simplificada tem menor complexidade aritmética que suas versões anteriores. Particularmente, o número de multiplicações envolvidas é substancialmente menor que o necessário para realizar a mesma decodificação usando FFTs ou algoritmos como o de Goertzel [6]. Após a introdução da Transformada Discreta e da Transformada Aritmética de Fourier, demonstraremos, na seção III, que a relação existente entre essas ferramentas nos permite analisar o conteúdo freqüencial de um sinal discreto no tempo. A seção IV contém, efetivamente, a proposta deste trabalho. São apresentados os fundamentos que conduzem à escolha de parâmetros tais como freqüência de amostragem e comprimento da transformada, para um caso específico. Esses fatores são alguns dos responsáveis pela precisão e pela complexidade da decodificação que desejamos realizar. A seção V apresenta algumas conclusões e sugestões.

Os autores são do Grupo de Pesquisa em Processamento Digital de Sinais, Departamento de Eletrônica e Sistemas - UFPE, C.P. 7800, 50711-970, Recife-PE, E-mail: flagbros@elogica.com.br, {ricardo, hmo, marciam}@ufpe.br.

II. A TRANSFORMADA ARITMÉTICA DE FOURIER

A simplificação do cálculo dos coeficientes da Série de Fourier de um sinal é um dos pontos-chave deste trabalho. A ferramenta responsável por isto é a Transformada Aritmética de Fourier. Esta seção apresenta, de forma resumida, a teoria que originou sua versão simplificada [5], algoritmo que será empregado na nova proposta para decodificação de sinais DTMF.

II.1 Preliminares matemáticos

Antes de iniciarmos o desenvolvimento teórico da Transformada Aritmética de Fourier, apresentamos algumas ferramentas matemáticas que estão envolvidas com sua compreensão e aplicação.

Definição 1 (Função de Möbius): A função de Möbius, $\mu(n)$, é definida por

$$\mu(n) \triangleq \begin{cases} 1 & se \ \ n=1, \\ (-1)^r & se \ \ n=\prod_{i=1}^{r} p_i, \text{ onde os } p_i \text{ sao primos distintos,} \\ 0 & se \ \ p^2 \mid n, \ \ \text{para algum primo } p. \end{cases}$$

Um importante resultado, baseado na definição 1, é apresentado no teorema a seguir [4].

Teorema 1 (Fórmula de inversão de Möbius para séries finitas): Seja n inteiro e positivo e f_n uma seqüência não-nula para $1 \le n \le N$ e nula para $n > N$. Se

$$g_n = \sum_{k=1}^{\lfloor N/n \rfloor} f_{kn} \,,$$

então

$$f_n = \sum_{m=1}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(m) g_{mn} \,.$$

❐

A seguir, definimos a Transformada Discreta de Fourier (DFT), ferramenta de fundamental importância em Processamento Digital de Sinais [7].

Definição 2 (A Transformada Discreta de Fourier): Seja N inteiro positivo e v um vetor N-dimensional de elementos reais ou complexos. A Transformada Discreta de Fourier de v é um vetor V N-dimensional, cujos elementos são dados por

$$V[k] \triangleq \sum_{i=0}^{N-1} v[i] \exp\left(-j\frac{2\pi k i}{N}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \cdot \qquad (1)$$

A DFT inversa é dada por

$$v[i] \triangleq \sum_{k=0}^{N-1} V[k] \exp\left(j\frac{2\pi k i}{N}\right), \quad i = 0, 1, \ldots, N-1 \cdot \qquad (2)$$

❐

II.2 Reed-Tufts

A AFT Simplificada é uma evolução do algoritmo proposto por Reed-Tufts [4]. Este último é considerado aqui com o objetivo de facilitar o entendimento do método de Reed-Shih.

Considere uma função $v(t)$ real com período T cuja Série de Fourier é finita (hipótese de sinal de banda limitada), com N termos, e dada por

$$v(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{N} b_n \,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n t}{T}\right), \qquad (3)$$

onde a_0 é a média de $v(t)$. Denotemos por $\bar{v}(t)$ o sinal $v(t)$ subtraído de sua média. Aplicando um atraso de αT a $\bar{v}(t)$, temos que

$$\bar{v}(t+\alpha T) = \sum_{n=1}^{N} c_n(\alpha) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + \sum_{n=1}^{N} d_n(\alpha) \,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n t}{T}\right), \qquad (4)$$

onde $|\alpha| < 1$ e

$$c_n(\alpha) = a_n \cos(2\pi n \alpha) + b_n \,\mathrm{sen}(2\pi n \alpha) \,, \qquad (5.a)$$

$$d_n(\alpha) = -a_n \,\mathrm{sen}(2\pi n \alpha) + b_n \cos(2\pi n \alpha) \,. \qquad (5.b)$$

Definição 3: A n-ésima soma parcial é

$$S_n(\alpha) \triangleq \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \bar{v}\left(\frac{m}{n} T + \alpha T\right), \qquad (6)$$

onde $|\alpha| < 1$. ❐

Agora, desejamos mostrar que é possível definir os coeficientes a_n e b_n em função de $c_n(\alpha)$. Inicialmente, expressemos $c_n(\alpha)$ em termos das somas parciais.

Teorema 2: Os coeficientes $c_n(\alpha)$ são calculados através da fórmula de inversão de Möbius para séries finitas (teorema 1) e são expressos por [4]

$$c_n(\alpha) = \sum_{l=1}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(l) S_{ln}(\alpha) \cdot \qquad (7)$$

Além disso, os coeficientes a_n e b_n da série de Fourier são computados por

$$a_n = c_n(0),$$

$$b_n = (-1)^m c_n\left(\frac{1}{2^{k+2}}\right) \quad n = 1, \ldots, N, \qquad (8)$$

onde k e m são obtidos da fatoração de n na forma $2^k(2m+1)$. ❐

A complexidade multiplicativa e a aditiva (multiplicações e adiçoes reais) desse algoritmo são dadas, respectivamente, por

$$M_R(N) = \frac{3}{2} N \quad \text{e} \quad A_R(N) = \frac{3}{8} N^2 \,.$$

II.3 Reed-Shih (AFT Simplificada)

Neste método, as somas parciais são redefinidas em concordância com as somas propostas por H. Bruns [1].

Definição 4 (Somas de Bruns): A $2n$-ésima soma alternante de Bruns, $B_{2n}(\alpha)$, é definida por

$$B_{2n}(\alpha) \triangleq \frac{1}{2n} \sum_{m=0}^{2n-1} (-1)^m v\left(m\frac{T}{2n} + \alpha T\right). \qquad (9)$$

❐

Observando a definição de $c_n(\alpha)$ em (5.a) e fazendo uso do teorema 2 e da definição 3, chegamos ao seguinte resultado [5]:

Teorema 3: Os coeficientes $c_n(\alpha)$ são dados pela fórmula de inversão de Möbius para séries finitas,

$$c_n(\alpha) = \sum_{l=1,3\ldots}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(l) B_{2nl}(\alpha) \cdot \qquad (10)$$

Observando a equação (5.a), podemos distinguir duas condições:

- $a_n = c_n(0)$.
- $b_n = c_n(1/4n)$.

Utilizando estas duas condições de partida e o teorema 3, derivamos o teorema que segue.

Teorema 4 (Reed-Shih): Os coeficientes de Fourier a_n e b_n são avaliados por

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\,dt\,, \tag{11.a}$$

$$a_n = \sum_{l=1,3\ldots}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(l)\, B_{2nl}(0), \tag{11.b}$$

$$b_n = \sum_{l=1,3\ldots}^{\lfloor N/n \rfloor} \mu(l)(-1)^{\frac{(l-1)}{2}}\; B_{2nl}(1/4\,n\,l), \tag{11.c}$$

para $n = 1,..., N$. ❒

A complexidade multiplicativa e a aditiva desse algoritmo são dadas, respectivamente, por

$$M_R(N) = N \quad \text{e} \quad A_R(N) = \frac{1}{2}N^2\,.$$

O algoritmo proposto por Reed-Shih é mais "balanceado" que a versão anterior, pois apresenta esforços computacionais similares para o cálculo dos coeficientes a_n e b_n. Além disso, sua complexidade aritmética é menor que a de seu antecessor.

III. A DFT E OS COEFICIENTES DA SÉRIE DE FOURIER

Para estimar a DFT de uma seqüência, a partir dos coeficientes da Série de Fourier do respectivo sinal contínuo, é necessário que encontremos uma relação entre estas duas ferramentas. Nesta seção, demonstraremos que há uma correspondência direta entre elas. Isso nos permitirá gozar dos benefícios de baixa complexidade computacional da AFT para calcular os referidos coeficientes e, consequentemente, a DFT associada aos mesmos.

Considere a expansão em Série de Fourier de um sinal contínuo $v(t)$, de período T, até o harmônico de índice $N/2$,

$$v(t) \cong a_0 + \sum_{n=1}^{N/2} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + \sum_{n=1}^{N/2} b_n \,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right), \tag{12}$$

onde N é par e todos os outros termos da série são considerados insignificantes. Se amostrarmos N pontos igualmente espaçados ao longo de um período de $v(t)$, originamos uma seqüência $v[i]$. O equivalente discreto da expressão (12) pode, então, ser escrito da seguinte forma:

$$v[i] = a_0 + a_{N/2}(-1)^i + \sum_{n=1}^{(N-2)/2} a_n \cos\left(\frac{2\pi n\, i}{N}\right) + $$

$$+ \sum_{n=1}^{(N-2)/2} b_n \,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n\, i}{N}\right). \tag{13}$$

Agora, considere o vetor V, correspondente à DFT de comprimento N da seqüência $v[i]$. Escrevemos cada uma das componentes de V sob a forma cartesiana, denotada por

$$V[n] = \Re e\{V[n]\} + j.\Im m\{V[n]\},$$

e substituímos na expressão (2), que define a DFT inversa (notemos que o índice de V, agora, é representado por n). Após realizarmos algumas simplificações explorando as propriedades de simetria da DFT, rescrevemos (2) da seguinte maneira:

$$v[i] = \frac{V[0]}{N} + \frac{V[N/2](-1)^i}{N} + \frac{2}{N}\sum_{i=0}^{(N-2)/2} \Re e\{V[n]\}\cos\left(\frac{2\pi n\, i}{N}\right)$$

$$-\frac{2}{N}\sum_{i=0}^{(N-2)/2} \Im m\{V[n]\}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi n\, i}{N}\right). \tag{14}$$

Observando as expressões (13) e (14), ambas referentes a $v[i]$, validamos as correspondências que seguem:

$$a_0 = \frac{V[0]}{N}\;,\quad a_{N/2} = \frac{V[N/2]}{N}\;, \tag{15}$$

$$a_n = \frac{2.\Re e\{V[n]\}}{N},\; b_n = -\frac{2.\Im m\{V[n]\}}{N},\; n = 1,..., \frac{(N-2)}{2}. \tag{16}$$

De forma análoga, é possível mostar que, para N ímpar,

$$a_0 = \frac{V[0]}{N}\;, \tag{17}$$

$$a_n = \frac{2.\Re e\{V[n]\}}{N},\quad b_n = -\frac{2.\Im m\{V[n]\}}{N},\quad n = 1,..., \frac{(N-1)}{2}. \tag{18}$$

Além disso, para qualquer N,

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{2}{N}\left|V[n]\right|. \tag{19}$$

IV. A AFT E A DECODIFICAÇÃO DE SINAIS DTMF

Nesta seção, apresentamos o foco desse trabalho: o emprego da Transformada Aritmética de Fourier na decodificação de sinais DTMF. Para essa aplicação, são apresentadas, também, as vantagens e restrições que o método determina. Objetivamente, o que faremos é calcular os coeficientes da Série de Fourier que correspondem às freqüências mais próximas do sinal DTMF. Após isto, através dos resultados da seção III, obteremos as componentes da DFT do mesmo sinal associadas a esses coeficientes, estabeleceremos uma medida de erro da estimativa e apresentaremos possibilidades do uso de arredondamento no algoritmo utilizado. Iniciemos, entretanto, apresentando alguns conceitos acerca do sistema DTMF.

IV.1. O sistema de sinalização DTMF

O *Dual-Tone Multi-Frequency* (DTMF) é um sistema de sinalização usado em telefonia, que envia sinais na faixa de freqüência de voz. Cada sinal ou dígito corresponde à soma de dois tons senoidais, um de alta e outro de baixa freqüência, associados de acordo com o teclado que a Figura 1 apresenta [8].

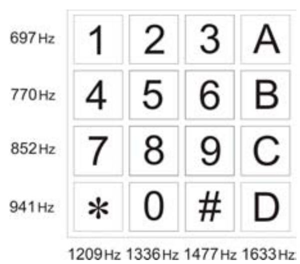

Fig. 1. Teclado DTMF

Uma vez que o sinal DTMF é recebido, seu conteúdo espectral é analisado de modo que se possa identificar que dígito o mesmo representa. Esta análise pode ser feita através do cálculo de sua DFT, imaginando que dispomos de uma seqüência gerada a partir da amostragem de um sinal contínuo. São observadas as magnitudes das oito componentes associadas às freqüências físicas mais próximas das freqüências DTMF. Então, conhecendo as duas componentes mais fortes, realiza-se a decodificação.

Um importante aspecto deste processo é a forma como se calcula a DFT. Usualmente, são empregadas transformadas rápidas de Fourier, FFTs, que admitem apenas comprimentos que sejam potências de 2. Outro algoritmo bastante usado é o algoritmo de Goertzel, particularmente adequado quando se deseja calcular apenas algumas componentes da DFT de uma seqüência.

IV.2 A freqüência de amostragem e o comprimento da transformada

O uso da AFT para analisar o conteúdo freqüencial de um sinal discreto no tempo implica na escolha de alguns parâmetros decisivos à precisão e à eficiência computacional do processo. O primeiro desses fatores diz respeito à taxa de amostragem do sinal contínuo original. Fixaremos esta freqüência em 8 kHz, um valor usado em sistemas telefônicos reais.

Um outro parâmetro importante é o comprimento da transformada. Como comentado, precisamos escolher um único valor de N que possa detectar, de modo satisfatório, as oito freqüências DTMF. A relação

$$n = \frac{f\,N}{f_s}\,, \tag{20}$$

onde f denota a freqüência das raias espectrais do sinal, f_s é a freqüência de amostragem e N é o comprimento da transformada, fornece-nos o índice n do coeficiente que corresponde a f. Naturalmente, encontra-se um valor não inteiro para n. O mesmo é, então, aproximado e, consequentemente, identifica-se também uma freqüência aproximada. Isso nos permite definir um erro relativo dado por

$$E_R \overset{\Delta}{=} \frac{\left| f - \tilde{f} \right|}{f}\,,$$

onde $\tilde{f}$ é a freqüência aproximada a qual nos referimos. Calculamos, também, o erro relativo médio, $\bar{E}_R$, obtido pela média aritmética simples entre os E_R das freqüências DTMF. A expressão (21) nos fornece a raiz do erro médio quadrático relativo:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8}\left(\bar{E}_R - E_{Rj}\right)^2}\;. \tag{21}$$

O índice j, variando de 1 a 8, corresponde ao E_R associado a cada uma das oito freqüências DTMF.

Determinar um comprimento que minimize $\bar{E}_R$ e RMSE significa uma detecção com menor sensibilidade a erros, sejam eles inseridos pelo sistema físico ou pelo algoritmo da AFT. Através de um procedimento de busca, fixamos N em 114, um valor que atende satisfatoriamente ao que foi estabelecido acerca dos erros.

IV.3 Aplicando a transformada aritmética de Fourier

Conhecendo os valores de N e f_s, através da equação (20), encontramos os índices dos coeficientes necessários à análise que desejamos realizar. As equações (11.b) e (11.c) determinam as somas de Bruns que precisam ser obtidas a fim de calcularmos esses coeficientes. Os resultados são apresentados na Tabela I.

Lembremos, observando (9), que cada soma de Bruns também é função de α. Em (11.b) e (11.c), verificamos que esse parâmetro vale 0 (zero) no cálculo das somas referentes aos a_n e $1/4nl$ nas que se referem aos b_n.

Um fator que também deve ser observado na equação (9) é a necessidade de conhecermos o valor do sinal em instantes de tempo fracionários. Como dispomos de uma seqüência, precisaremos realizar interpolações. O tipo de interpolação escolhido influencia na inserção de erro no cálculo das somas de Bruns e no custo de uma implementação prática do algoritmo. Aqui, este último foi implementado através de um programa em que utilizamos interpolação linear (1ª ordem).

TABELA I
FREQÜÊNCIAS DTMF, ÍNDICES DOS COEFICIENTES E SOMAS DE BRUNS ASSOCIADOS, $f_s = 8$ KHZ, $N = 114$

f (Hz)	n	Somas de Bruns
697	10	B_{20}, B_{60}, B_{100}, B_{140}, B_{220}
770	11	B_{22}, B_{66}, B_{110}, B_{154}
852	12	B_{24}, B_{72}, B_{120}, B_{168}
941	13	B_{26}, B_{78}, B_{130}, B_{182}
1209	17	B_{34}, B_{102}, B_{170}
1336	19	B_{38}, B_{114}, B_{190}
1477	21	B_{42}, B_{126}, B_{210}
1633	23	B_{46}, B_{138}

Para cada um dos 16 sinais DTMF, gerados analiticamente através do programa, foram calculados os coeficientes de índices apresentados na Tabela I. Neste ponto, de acordo com a equação (19), já possuímos resultados suficientes para realizar a decodificação do sinal, uma vez que o fator de escalonamento $2/N$, presente na mesma equação, em nada altera a análise. A simulação mostrou a eficácia do processo, decodificando cada dígito corretamente.

IV.4. A complexidade aritmética

O ponto de maior interesse na proposta de utilizarmos a AFT para a decodificação de sinais DTMF é a baixa complexidade aritmética deste algoritmo. Baseados em [5], chegamos ao número de multiplicações reais e ao número aproximado de adições reais envolvidas no caso analisado ao longo dessa seção. A Tabela II apresenta uma comparação entre a complexidade do método proposto e a do algoritmo de Goertzel [6].

O número de adições que precisamos realizar na AFT Simplificada, cerca de 2,5 vezes maior que no algoritmo de Goertzel, é amplamente compensado pela considerável diferença no número de multiplicações, cerca de 15 vezes menor. Um resultado semelhante é observado se compararmos a AFT com a FFT de Cooley-Tukey. Para $N = 128$, potência de 2 mais próxima de 114, o algoritmo de Cooley-Tukey necessita de 712 multiplicações e 2504 adições [6].

TABELA II
COMPARAÇÃO ENTRE A COMPLEXIDADE DA AFT SIMPLIFICADA E DO ALGORITMO DE GOERTZEL, $f_s = 8$ KHZ, $N = 114$

	AFT Simplificada	Goertzel
Multiplicações	56	904
Adições	~ 4500	1800

IV.5 Uma medida de erro

Como dissemos em IV.3, a necessidade de realizarmos interpolações no cálculo das somas de Bruns origina erros nos valores que encontramos para os a_n e b_n . Com o intuito de avaliar essa imprecisão, utilizamos a equação (19) para fazer estimativas das duas componentes da DFT que determinam cada dígito DTMF. Por exemplo, para o sinal que representa o dígito "1", estimamos $V[10]$ e $V[17]$. Os erros dessas componentes, em relação aos valores exatos das mesmas, obtidos previamente por um método direto, são dados por

$$E_{Rn} = \frac{\left| |V[n]| - |\tilde{V}[n]| \right|}{|V[n]|}. \tag{22}$$

Na equação acima, $|\tilde{V}[n]|$ corresponde à estimativa da amplitude da componente de índice n da DFT, enquanto $|V[n]|$ corresponde ao seu valor exato.

Após obtermos os E_{Rn} para cada sinal, agrupamos os que correspondem a uma mesma freqüência e calculamos sua média aritmética simples, $\bar{E}_{Rn}$. A Tabela III apresenta as freqüências DTMF e o erro de estimativa médio associado.

É importante entendermos que a medida de erro apresentada na Tabela III sofre significativas variações em função da freqüência de amostragem e do comprimento escolhido para a transformada. O mesmo acontece com a complexidade aritmética do algoritmo. Pode-se, pois, variar f_s e, particularmente, N, de modo que a complexidade computacional e o erro de estimativa inserido sejam balanceados de acordo com as necessidades de um projeto específico. Entretanto, qualquer variação nesses parâmetros deve garantir, dentro de certos limites, a decodificação correta dos sinais DTMF analisados. Também é interessante observarmos que a fase do sinal não altera o resultado de sua análise, desde que trabalhemos com um número de pontos que nos permita extrair as raias espectrais pretendidas.

TABELA III
FREQÜÊNCIAS DTMF, ÍNDICES DOS COEFICIENTES E ERROS DE ESTIMATIVA MÉDIOS ASSOCIADOS, $f_s = 8$ KHZ, $N = 114$.

f (Hz)	n	$\bar{E}_{Rn} \times 10^{-2}$
697	10	3,41
770	11	3,01
852	12	3,69
941	13	4,14
1209	17	7,13
1336	19	9,91
1477	21	10,79
1633	23	13,10

IV.6 Arredondamentos na AFT

De acordo com o que foi descrito a respeito do sistema DTMF, só deve haver dois harmônicos fortes presentes num determinado sinal. Espera-se, portanto, que suas outras componentes sejam todas desprezíveis diante do que se deseja detectar. Observando essa característica e o Teorema 4, pode-se imaginar que, para o cálculo de um dado coeficiente através da AFT, algumas somas de Bruns representam uma contribuição insignificante para o resultado final e podem ser desprezadas.

A Tabela I, por exemplo, mostra que necessitamos de B_{24}, B_{72}, B_{120} e B_{168} para calcularmos a componente de índice 12. No entanto, B_{72} é a única soma associada à componente de índice 72 que, como sabemos, é irrelevante para qualquer dígito DTMF. Algo semelhante acontece com B_{120} e B_{168}. Dessa forma, calculando apenas B_{24} (para α igual a 0 e 1/48) obtemos aproximações satisfatórias para a_{12} e b_{12}. O controle desse arredondamento pode ser feito calculando-se previamente o valor exato dos fatores que estaremos desprezando. Esse mesmo raciocínio pode ser aplicado às demais linhas da Tabela I.

O procedimento que descrevemos reduz ainda mais a complexidade aritmética da AFT Simplificada quando desejamos decodificar sinais DTMF. Se f_s = 8 kHz e N = 114, precisamos realizar apenas 16 multiplicações reais e cerca de 470 adições reais para o cálculo das 8 componentes que correspondem às freqüências DTMF.

V. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Este artigo oferece uma nova ferramenta para a decodificação de sinais DTMF: a Transformada Aritmética de Fourier. Foram discutidos seus aspectos teóricos e alguns de seus aspectos práticos, bem como suas vantagens e limitações. Apresentamos resultados que confirmam a eficácia do algoritmo e sua baixa complexidade computacional, particularmente, seu baixo número de multiplicações quando comparado a outros algoritmos empregados na mesma aplicação. Estabelecemos uma forma de medir o erro inserido quando desejamos estimar a DFT a partir da AFT e apresentamos uma possibilidade do uso de arredondamento no algoritmo proposto, o que permitiu uma redução significativa na complexidade computacional da decodificação de um sinal DTMF.

Em trabalhos futuros, esperamos refinar o método proposto neste artigo, detalhando vantagens e restrições de outras simplificações que podem ser realizadas. Esperamos, também, explorar de forma mais ampla sua sensibilidade a erros e apresentar sugestões para sua implementação prática.

REFERÊNCIAS

[1] H. Bruns, *Grundlinien des Wissenschaftlichenen Rechnens*, Leipzig, 1903.

[2] R. J. S. Cintra e H. M. de Oliveira, A Short Survey on Arithmetic Transforms and the Arithmetic Hartley Transform, *Revista da Sociedade Brasileira de Telecomunicações,* abril 2004 (aceito para publicação).

[3] D. W. Tufts e G. Sadasiv, The Arithmetic Fourier Transform, *IEEE ASSP Magazine*, pp. 13-17, Jan. 1988.

[4] I. S. Reed, D. W. Tufts, X. Yu, T. Truong, M.-T. Shih e X. Yin, Fourier Analysis and Signal Processing by Use of the Möbius Inversion Formula, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-38, pp. 459-470, Mar. 1990.

[5] I. S. Reed, M.-T. Shih, T. K. Truong, E. Hendon e D. W. Tufts, A VLSI Architecture for Simplified Arithmetic Fourier Transform Algorithm, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 40, pp. 1122-1133, May 1992.

[6] R. E. Blahut, *Fast Algorithms for Digital Signal Processing*, Addison-Wesley, 1985.

[7] A. V. Oppenheim, R. W. Schafer e J. R. Buck, *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice Hall, 2ª ed., 1999.

[8] S. J. Orfanidis, *Introduction to Signal Processing*, Prentice-Hall, 1996.