

EMPACOTAMENTO DE ESFERAS E COBERTURAS EM HIPER-ESPAÇOS: APLICAÇÕES EM COMUNICAÇÕES DE DADOS

de Carvalho, M. M. & de Oliveira, H. M.

Departamento de Eletrônica & Sistemas - Centro de Tecnologia
CODEC - C.P. 7800 50.711-970 Recife-Pernambuco

Desde o trabalho monumental de Shannon, ficou explícita uma estreita relação entre construção de estruturas densas em hiper-espacos e a transmissão em altas taxas, próximas à capacidade do canal (*Proc. IRE* **37**,p.10,1949). Há muito que os reticulados, no sentido matemático e cristalográfico do termo, foram propostos como técnicas de codificação para o canal Gaussiano (*Info. Contr.* **19**,p.66,1971). Entretanto, somente recentemente, eles vêm sendo empregados com sucesso, a exemplo dos MODEMs à 14.400 bps e 19.200 bps comercializados pela Motorola, baseados nos reticulos de Gosset e Leech, respectivamente (*IEEE JSAC*, **7**,p.968,1989). Neste trabalho, aborda-se a matemática de reticulos com aplicações em comunicações, analisando-se a relação existente entre a transmissão de mensagens digitais codificadas e os problemas matemáticos clássicos de empacotamento de esferas (empilhamentos) e recobrimentos do espaço euclidiano (coberturas), introduzidos em 1831 por Gauss (Conway/Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Springer Verlag,1988). As relações entre a codificação de canal clássica e reticulos densos são exploradas, demonstrando-se tratarem-se de esquemas de modulação codificada empregando símbolos de uma modulação M-ária tipo QAM generalizada como constelações bidimensionais constituintes (*IEEE Trans. Info. Theory*, **34**, p.1123, 1988). A estrutura e propriedades de reticulos são revisadas, incluindo conceitos de densidade, espessura, número de contato, funções teta, etc. Alguns reticulos multidimensionais são estudados, incluindo Z^n , D^4 , E^3 , A^{16} , K^{12} , A^{24} , A^{32} entre outros (Thompson, *From Error-Correcting codes through Sphere Packings to Simple Groups*, The Math. Ass. of America,1983). Observando o comportamento assintótico para grande número de dimensões, verifica-se surpreendentemente que a capacidade de canal não pode ser atingida empregando reticulos densos (*proc. Int. Symp. on Signals, Systems and Electr.* p.105,1992). Em contrapartida, demonstra-se que o emprego de coberturas finas ótimas permite fazê-lo, restando apenas provar que é possível controlar a taxa de erros nestes casos (*Ann. Télécomm.*, **47**,p.202,1992). Em particular, procura-se demonstrar que o raio de cobertura torna-se o parâmetro mais importante no desempenho do sistema (*Eur. Trans. on Telecomm.*, **4**,p.133,1993), ao invés do raio do empacotamento (ou distância mínima), devido a fenômenos de endurecimento de esferas (*sphere hardening*). Estudos de técnicas de simulação Monte Carlo incluindo *importance sampling* estão em andamento visando permitir a estimação do desempenho de coberturas em canal Gaussiano, através de computador digital. Os resultados fornecerão subsídios para o projeto de novos esquemas eficientes que suportem taxas de transmissão ainda mais elevadas que o atual estado da arte.

(Apoio: CODEC, CNPq)