CÓDIGOS DE HAMMING-HARTLEY E GOLAY-HARTLEY

Caio Marcelo Fernandes Barros[1]; Hélio Magalhães de Oliveira[2]

[1]Estudante do Curso de Engenharia Eletrônica - CTG – UFPE;
E-mail: caio1408@yahoo.com.br
[2]Docente/pesquisador do Depto de Eletrônica e Sistemas – CTG – UFPE;
E-mail: hmo@ufpe.br

Resumo: Códigos de bloco sobre os reais construídos a partir de Transformadas discreta de Hartley (DHT) são apresentados. Matrizes geradoras e de verificação de paridade foram calculadas para códigos com blocos de comprimento até N=24. Em particular, dois códigos ditos de Hamming-Hartley e Golay-Hartley são apresentados.

Palavras–chave: códigos de bloco reais; DHT; transformadas discretas.

INTRODUÇÃO

A iniciativa desta pesquisa baseia-se no desenvolvimento de implementações úteis na redução do tempo de processamento e do esforço computacional, em particular, como apoio no cálculo de transformadas [1], visando fornecer ferramentas de suporte para o desenvolvimento de um projeto maior que trata de projetos de sistemas de multiplexação [2]. As transformadas discretas se apresentam como uma promissora área de investigação, aliada ao conceito de auto-seqüências de operadores lineares [3]. A motivação geral é aplicar esta abordagem em uma nova técnica que poderá propiciar um esforço aritmético computacional menor aquele dos sistemas usuais, viabilizando a implementação de uma comunicação mais veloz e eficiente. O trabalho desenvolvido possibilitou adquirir conhecimento dos métodos empregados nos sistemas de comunicações, e em particular, o embasamento teórico obtido permite a compreensão das novas técnicas envolvendo transformadas discretas e transformadas digitais [4]. Selecionou-se apenas a construção de códigos com base em transformadas, visto que os aplicativos e simulações implementadas desempenham um papel coadjuvante em outros projetos. O objetivo especifico aqui é lançar uma alternativa para o projeto de códigos de blocos sobre os números reais [5-6].

MATERIAS E MÉTODOS

As principais técnicas aplicadas envolvem a álgebra linear (operadores), a teoria de códigos de blocos clássicos [7], os códigos de retículos (empacotamentos de hiper-esferas em espaços euclidianos) [8] e transformadas discretas (especialmente as versões discretas das transformadas de Fourier [1] e Hartley [1], [9]). A estrutura dos novos códigos projetados é baseada na estrutura de auto-seqüências da transformada discreta [10], uma vez que a DHT constitui um operador linear [9]. Tais auto-seqüências *x*[*n*] devem obedecer a relação $[H]_N\, x[n] = \pm\sqrt{N}.x[n]$, de modo que $x[n]\left([H]_N \mp \sqrt{N} I_N\right)^T = 0$, onde o sinal a ser escolhido depende de se considerar um autovalor positivo ou negativo do operador. Seja $[H]_N := \left(cas(\frac{2\pi}{N} k.n) \right)$ $n,k=0,1,\ldots,N-1$ a matriz DHT de dimensão $N\times N$.

O núcleo (real) casoidal de Hartley é $cas(x):=cos(x)+sin(x)$, como usual. Aqui, define-se um matriz $H^T := [H]_N \mp \sqrt{N} I_N$ (I_N denota a matriz identidade) para desempenhar um papel similar aquela da matriz de verificação de paridade de códigos clássicos [7]. A dimensão desta matriz é N-K=$rank([W]_N \mp \sqrt{N} I_N)$.

RESULTADOS

Os códigos construídos a partir da matriz de Hartley unitária de comprimento de bloco 4 resultam em:

H: [4,3] $$G_4^+ = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

H: [4,1] $$G_4^- = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \vdots 1 \end{vmatrix}.$$

Mostrou-se que a dimensão dos códigos de Hartley gerados através de uma DHT de comprimento *N* é dada por:

$$K^+ = \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil + \delta_{N \bmod 4,0} \text{ and } K^- = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor - \delta_{N \bmod 4,0},$$

em que $\delta_{k,l}$ denota o símbolo de Kronecker. Interessante observar que a taxa $K^\pm/N$ dos códigos é sempre próximo a ½.

Códigos concebidos por este método de projeto podem ser interpretados com códigos em retículos [8]. Também vale mencionar que os retículos Λ e $\Lambda^\perp$ correspondentes aos códigos $[N,K^+]$ e $[N,K^-]$ são retículos duais. Um caso de particular interesse ocorre quando existem auto-seqüências de componentes inteiras. Mostrou-se que isto acontece quando $N=\mathrm{m}^2$.

Código de Hamming-Hartley.

A matriz geradora do código real de Hamming-Hartley de parâmetros $[N,K^+]=[7,4]$ é

$${}_H G_7^+ = \begin{vmatrix} 3.9372 & 3.81064 & 1.66971 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1.82300 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4.75175 & -6.31546 & -2.50481 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2.63705 & 2.50481 & 0.83511 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Código de Golay-Hartley.

A matriz geradora do código real de Golay-Hartley de parâmetros $[N,K^+]=[23,12]$ pode ser encontrada pelo mesmo procedimento. Já a matriz real de verificação de paridade do código de Golay-Hartley code, ${}_H H_{23}^+$.

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0707	0.1328	0.1806	0.2052	0.2576	0.2725	0.3446	0.3546	0.4865	0.4931	0.9975
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.2096	-0.3738	-0.4600	-0.4311	-0.4377	-0.2763	-0.2355	0.0703	0.0802	0.8307	0.4427
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.3139	0.4952	0.4639	0.1856	-0.0295	-0.4240	-0.4346	-0.6661	0.0749	-0.3157	-0.6636
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.3631	-0.4411	-0.1470	0.3930	0.5700	0.6670	0.0734	0.2235	-0.6462	-1.1716	-0.1579
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0.4208	0.3418	-0.1762	-0.6303	-0.1794	0.2343	1.1547	0.1737	-1.0834	-0.7214	-0.5346
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-0.4200	-0.0859	0.5313	0.5639	-0.3692	0.0609	0.1053	-0.1063	0.0355	-0.8583	-0.4572
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0.4704	-0.0758	-0.4440	0.1100	1.1463	-0.2617	-1.2212	0.2180	0.2166	-0.4859	-0.6726
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-0.4108	0.4409	0.4098	0.0483	-0.0264	-0.1150	-0.3806	-0.5899	0.5268	-0.2818	-0.6212
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0.4964	-0.4527	0.5468	0.4790	-1.2225	0.1046	0.1456	-0.6493	0.1306	0.1316	-0.7100
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-0.3338	1.1216	-0.3070	-0.7009	0.4065	-0.8335	0.5190	-0.3977	-0.1826	0.3034	-0.5947
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0.7645	-0.5050	-0.1304	-0.4541	0.0619	-0.0811	-0.2977	0.3274	-0.5944	0.4580	-0.5491
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-0.1386	-0.2349	-0.3342	0.2470	-0.4127	0.3455	-0.4255	0.3412	-0.3778	0.2531	-0.2632

CONCLUSÕES

Apresentou-se uma alternativa para o projeto de códigos de blocos sobre os números reais. Em particular, dois códigos interessante foram construídos, tendo em conta que os seus parâmetros coincidem com aqueles dos únicos códigos perfeitos existentes, os códigos de Hamming e de Golay [7]. A estrutura é completamente descrita em termos de auto-seqüências, as quais podem desempenhar papel importante no cálculo eficiente da DHT através da partição da transformada em sub-transformadas definidas em espaços invariantes (espaços de auto-seqüências da DHT). Conjuntamente com a teoria de treliças associadas a códigos corretores de erros clássicos [7], isto poderá proporcionar um caminho alternativo e inovador no cálculo da DHT de grande comprimento de bloco, podendo ser também utilizada na processamento digital de sinais [9], [11]. Um projeto inovador de construção de nova classe de códigos, intitulada de “códigos à partir de transformadas discretas” (que possam ser utilizados para um cálculo eficiente de espectro no processamento de sinais) foi proposto, e neste ponto é que deve se basear a continuação deste trabalho de pesquisa. O uso das auto-seqüências para comunicação de multi-usuário é um ponto que ainda falta por ser investigado, mas vem se revelando atrativo.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq): CMFB por bolsa de IC do programa PIBIC e HMdO por apoio financeiro parcial através do projeto CNPq#301996. Eles também agradecem ao Prof. Ricardo M. Campello de Souza (UFPE), Juliano Bandeira e Gilson Jerônimo da Silva Jr. (PPGEE-UFPE).

REFERÊNCIAS

[1] H.M. de Oliveira, R.M. Campello Souza. A Fast Algorithm for Computing the Hartley/Fourier Spectrum *Anais da Academia Brasileira de Ciências*. Rio de Jan., vol. 73, pp. 468-468, 2001.

[2] S. Haykin. **Communication Systems**, 4/e, Wiley, 2001.

[3] S-C. Pei, J.-J. Ding. Eigenfunctions of Linear Canonical Transforms, *IEEE Trans. on Signal Proc*., vol. 50, n.1, Janeiro, pp.11-26, 2002.

[4] R.M. Campello de Souza, H.M. de Oliveira, A.N. Kauffman. The Hartley Transform over a Finite Field. *Revista da Sociedade Brasileira de Telecomunicações*. vol. 14., n.1., pp. 46-54, 1999.

[5] T. Marshall Jr. Coding of Real-Number Sequences for Error Correction: A Digital Signal Processing Problem, *IEEE J. on Selected Areas in Communications*, vol. 2, pp. 381-392, Março, 1984.

[6] L.F. Borodin. Correcting Codes over the Real Number Field. *J. Commun. Technol*. vol. 48, n.8, pp. 896-902, 2003.

[7] S. Wicker. **Error Control Systems for Digital Communication and Storage**, Prentice-Hall, 1995.

[8] N.J.A. Sloane, The Sphere Packing Problem, *1998 Shannon Lecture*, 1998.

[9] K.J. Olejniczac, G.T. Heydt. Scanning the Special Section on the Hartley Transform, *Proc. of the IEEE*, vol. 82, pp.372-380, Março, 1994.

[10] S-C. Pei, J.-J. Ding. Eigenfunctions of Linear Canonical Transforms, *IEEE Trans. on Signal Proc*., vol. 50, n.1, Janeiro, pp.11-26, 2002.

[11] J. Kovacevic, M. Vetterli. Transform Coding: Past, Present and Future, *IEEE Signal Process. Magazine*, vol.18, n.5, Setembro, 2001.