

# ESTIMAÇÃO DOS COEFICIENTES DE UMA SÉRIE DE FOURIER USANDO O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS SEQUÊNCIAL

Eurico B de Souza Filho e Hélio M. de Oliveira

Departamento de Eletrônica e Sistemas - CTG- UFPE  
C.P. 7800, 50711-970, Recife - PE, Brazil  
e-mail: [eurico@ee.ufpe.br](mailto:eurico@ee.ufpe.br) [hmo@npd.ufpe.br](mailto:hmo@npd.ufpe.br),

## RESUMO

Neste trabalho é introduzido um novo algoritmo, desenvolvido no ambiente do Matlab<sup>®</sup>, para realizar uma estimação dos coeficientes de uma série trigonométrica de Fourier, baseado no método dos mínimos quadrados sequencial. São apresentadas simulações e resultados obtidos usando dados experimentais.

**Palavras-chave-** Estimação sequencial, Método dos Mínimos Quadrados, Avaliação espectral adaptativa.

## 1. INTRODUÇÃO

Em diversas áreas relacionadas à Engenharia, tais como: Telecomunicações, Eletrônica, Física e Biomédica, há frequentemente a possibilidade de se lidar com sinais periódicos, amostrados em uma dada taxa. Para a análise em tempo real destes sinais são usadas ferramentas matemáticas que fornecem informações sobre o seu espectro de frequências. No caso da análise espectral, as ferramentas mais usadas hoje em dia são as transformadas rápidas, conhecidas como FFT [1]. A FFT é um algoritmo extremamente eficiente, no sentido de reduzir o tempo de cálculo necessário para computar os coeficientes da série de Fourier, sob a forma discreta.

A maioria dos textos didáticos que abordam o problema da obtenção dos coeficientes de uma série trigonométrica de Fourier, coloca a questão do cálculo dos coeficientes como sendo resultante da minimização do erro médio quadrado entre a função periódica dada e uma série infinita composta de termos em seno e cosseno. Sabe-se que as funções seno e cosseno são ortogonais e os termos da série em seno e em cosseno, também são ortogonais entre si [3]. Baseado neste fato, este artigo propõe uma nova abordagem para a estimação dos coeficientes da série trigonométrica de Fourier através do método dos mínimos quadrados sequencial. Neste método, os coeficientes são adaptativamente estimados a medida que cada novo ponto é introduzido no algoritmo, daí a designação sequencial. Uma abordagem semelhante foi desenvolvida com base no método dos mínimos quadrados, na forma tradicional, para a estimação destes coeficientes [2].

Neste trabalho são apresentados resultados de simulação obtidos com o método proposto, bem como resultados baseados em dados experimentais

## 2- FUNDAMENTOS DA ANÁLISE ESPECTRAL

Para um melhor entendimento do problema, nesta seção são revisados os procedimentos usados para o cálculo dos coeficientes de uma série. Uma função periódica  $f(t)$ , de período  $T$ , pode ser representada em termos de um conjunto completo de

funções ortogonais do tipo  $\sin(n\omega_0 t)$  e  $\cos(n\omega_0 t)$  ( $n=0,1,2,\dots$ ) sobre um intervalo  $(t_0, t_0+2\pi/\omega_0)$  [3]. Assim, tem-se:

$$f(t) = a_0 + \sum (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) \quad (1)$$

A equação (1) é a conhecida série trigonométrica de Fourier de  $f(t)$  no intervalo  $(t_0, t_0+T)$ . Os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$  são dadas por:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt, \quad (2)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad (3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt. \quad (4)$$

Estas grandezas são obtidas através de uma expressão geral mostrada em (5).

$$C_r = \frac{\int_a^b f(t) g_r(t) dt}{\int_a^b g_r^2(t) dt}, \quad (5)$$

em que  $\{g_r(t)\}$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) são funções ortogonais para a par sobre o intervalo  $(a, b)$ , e  $C_r$  são determinados tal que a função  $S(C_r)$ , definida abaixo, seja minimizada.

$$f_e = f(t) - \sum_{r=1}^n C_r g_r(t) \quad (6)$$

$$S(C_r) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f_e^2(t) dt \quad (7)$$

Note-se que o problema colocado desta maneira, mascara o fato que os coeficientes podem ser obtidos de forma independente um do outro. Por outro lado, quando levando em consideração a ortogonalidade das funções é possível calcular os coeficientes da série usando o método dos mínimos quadrados sequencial, considerando um termo da série de cada vez.

### 3- ESTIMAÇÃO DOS COEFICIENTES DE FOURIER PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS.

Como a seqüência composta pelas funções seno e cosseno, individualmente, não forma um conjunto completo [3], faz-se necessário uma estimativa tanto de  $a_n$  quanto de  $b_n$ , para encontrar a amplitude  $C_n$  e a fase  $\alpha_n$  da componente do sinal numa dada freqüência harmônica  $n\omega_0$ . Esta estimativa é obtida minimizando a função  $S(\cdot)$  por um escolha dos coeficientes  $a_n$  e  $b_n$ .

$$S(a_n, b_n) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (f(t) - a_n \cos(n\omega_0 t))^2 dt + \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} (f(t) - b_n \sin(n\omega_0 t))^2 dt \quad (8)$$

Igualando o gradiente da função a zero, pode-se obter exatamente as equações (2), (3) e (4).

Estes resultados afirmam que cada coeficiente é escolhido de tal forma a ajustar função seno ou cosseno, numa dada freqüência, tal que a curva melhor se ajuste a função periódica original.

De posse dos coeficientes  $a_n$  e  $b_n$ , a amplitude  $C_n$  e a fase  $\alpha_n$  são facilmente determinadas por (9) e (10) respectivamente.

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (9)$$

$$\alpha_n = \tan^{-1} \left( \frac{b_n}{a_n} \right) \quad (10)$$

Considerando-se que a função  $f(t)$  é amostrada  $N$  vezes dentro de um período, o problema pode ser colocado sob a seguinte forma :

$$S(a_n, b_n) = \sum_{i=0}^N (f(t_i) - \cos(n\omega_0 t_i))^2 + \sum_{i=0}^N (f(t_i) - \sin(n\omega_0 t_i))^2 \quad (11)$$

Uma maneira de resolver este problema de minimização é usar o método dos mínimos quadrados seqüencial [4]. Este método é bastante conveniente tendo em vista que ele contorna os problemas relativos ao aparecimento de matrizes mal condicionadas [5].

### 4- O ALGORITMO DE ESTIMAÇÃO SEQÜENCIAL

O problema de estimação pode ser geometricamente interpretado como um processo de ajuste de curvas a pontos dispersos. A Figura 1 representa o caso em que uma função  $f(t, \theta)$  deve ser ajustada a um conjunto de pontos, dentro de um intervalo conhecido, por uma escolha apropriada de  $\theta$ . O algoritmo de estimação seqüencial pode ser estendido a um conjunto qualquer de funções com cada curva ajustada, adequadamente, segundo o método dos mínimos quadrados.

t- variável independente  
 $\theta_0$ - parâmetros iniciais  
 $\theta_{est}$ -parâmetro estimado

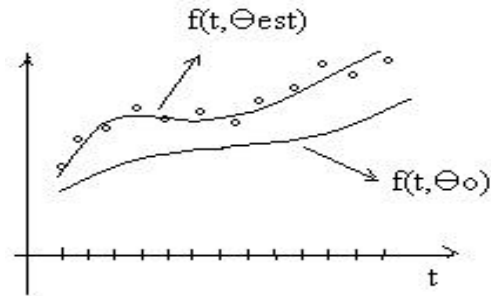


Fig. 1. - Representação do processo de ajustamento de uma função a um conjunto de pontos.

Para um conjunto com 'v' funções, contendo "p" parâmetros a serem estimados e "N" amostras para cada função, o método dos mínimos quadrados seqüencial é expresso através das seguintes relações:

$$\Theta_r = \Theta_{r-1} + P_r G_r (h_r - G_r^T D \Theta_{r-1}), \quad (12)$$

$$P_r = P_{r-1} - \frac{P_{r-1} G_r G_r^T P_{r-1}}{I + G_r^T P_{r-1} G_r}, \quad (13)$$

$$e \quad P_r^{-1} = \sum_{j=1}^r G_j G_j^T, \quad (14)$$

onde:

$I$  representa uma matriz identidade de dimensões  $v \times v$ ,

$$Dq_{(r-1)} = [q_{1(r-1)} - q_{10}] \dots \dots [q_{p(r-1)} - q_{p0}],$$

$$h_r = \begin{bmatrix} y_{1r} - f_1(t_r, \Theta_0) \\ \circ \\ \circ \\ y_{vr} - f_v(t_r, \Theta_0) \end{bmatrix}$$

Os valores de  $y_i$  representam os valores amostrados da grandeza que se deseja ajustar a curva  $f_i(\cdot)$ . A matriz

$$G_r^T = \begin{bmatrix} \partial f_1(t_r, \Theta_0) / \partial \Theta_1 & \circ & \partial f_1(t_r, \Theta_0) / \partial \Theta_p \\ \circ & \circ & \circ \\ \partial f_v(t_r, \Theta_0) / \partial \Theta_1 & \circ & \partial f_v(t_r, \Theta_0) / \partial \Theta_p \end{bmatrix}$$

é formada por elementos  $\partial f(t_r, \Theta_0) / \partial \Theta_j$  que representam a derivada da função na  $r$ -ésima observação, avaliada com os parâmetros da ultima iteração.

Para a aplicação do algoritmo ao processo de estimação de coeficientes de uma série de Fourier, foi desenvolvido, em ambiente do aplicativo MATLAB, um programa que minimiza a função  $S(a_n, b_n)$  dada por:

$$\begin{aligned}
S(a_n, b_n) = & \sum_{i=1}^N [f(t_i) - a_0]^2 + \\
& \sum_{i=1}^N [f(t_i) - a_n \cos(nw_0 t_i)]^2 + \\
& \sum_{i=1}^n [f(t_i) - a_1 \sin(nw_0 t_i)]^2 + \\
& \sum_{i=1}^N [f(t_i) - a_n \sin(nw_0 t_i)]^2
\end{aligned} \quad (15)$$

com  $n=1, \dots, \text{har}$ , onde  $\text{har}$  é número de harmônicas consideradas.

Note-se que, da forma concebida, o programa permite a escolha da quantidade de harmônicos que se quer obter. Observe, também, que é possível desenvolver um programa, apenas para determinar se num determinado sinal existe alguma componente numa dada frequência desejada.

No algoritmo, são determinadas as amplitudes  $C_n$  das componentes senoidais e cossenoidais correspondentes. Assume-se um valor 0,5 como valor inicial para cada parâmetro  $a_n$  e  $b_n$  e a matriz  $P$ , de dimensões  $(2 \cdot \text{har} - 1) \times (2 \cdot \text{har} - 1)$ , possui um valor inicial 1000 na sua diagonal principal. Observa-se por simulação, que para esta atribuição de valor inicial para  $P$ , o algoritmo converge rapidamente.

## 5) RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

São apresentados nesta seção alguns resultados baseados no algoritmo desenvolvido. Inicialmente, para avaliar o desempenho do algoritmo proposto é analisada a forma de onda gerada através da equação (16), cuja frequência da fundamental é de 60 Hz

$$\begin{aligned}
f(t) = & \cos(\omega t + 45^\circ) + 0.3 \sin(2\omega t + 60^\circ) - \\
& 0.5 \sin(3\omega t - 30^\circ) - 0.3 \cos(4\omega t) + \\
& 0.8 \cos(8\omega t - 20^\circ)
\end{aligned} \quad (16)$$

A figura 2 abaixo indicada a superposição da forma de onda gerada com 61 amostras e a forma de onda resultante da combinação das oito componentes harmônicas, cujas amplitudes foram estimadas pelo algoritmo.

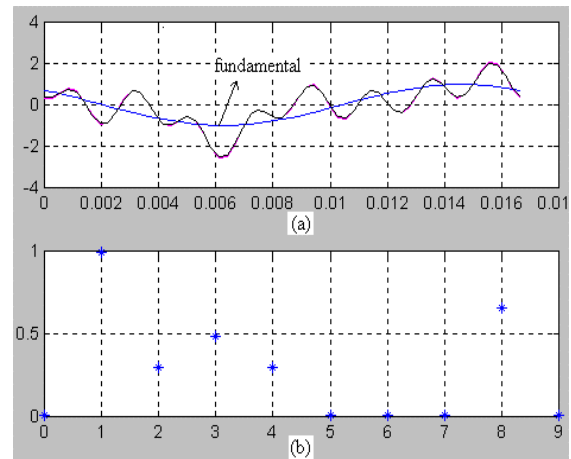


Fig 2 (a) Form de onda original e estimada (b) Espectro de amplitude

Na figura 2b está mostrado o espectro de amplitude desta forma de onda. Na escala apresentada, vê-se uma correspondência entre a forma de onda original e aquela obtida com os coeficientes estimados, indicando uma concordância com os resultados do algoritmo. Uma questão importante é saber quantas amostras, da forma de onda original, são necessárias para se ter uma boa estimativa, e.g., da ordem de 10%, no cálculo dos coeficientes. Por exemplo, considerando a oitava harmônica, quantas amostras igualmente espaçadas deve ter o sinal para que o erro obtido na estimativa da amplitude correspondente seja inferior a 10%. Na tabela 1 indica-se o erro obtido e a quantidade de amostras do sinal original.

Da tabela 1 observa-se que a menor quantidade de amostras para se estimar a fundamental, dentro do critério de erro estabelecido, é de 9 pontos. E para se estimar uma dada componente harmônica, com erro menor que 10%, a quantidade de amostras deve ser  $4 \cdot \text{har} + 1$ . Por exemplo, para se estimar a terceira harmônica são necessários  $4 \cdot 3 + 1 = 13$  amostras.

Na figura 3a é mostrada a forma de onda original, a fundamental e o somatório das 15 componentes de uma dente de serra. A forma de onda é formada com três períodos, tendo um total de 501 amostras. Na figura 3b apresenta-se o seu espectro de amplitudes com 15 harmônicas, incluindo o valor médio. Na tabela 2 estão mostrados os resultados do erro percentual de estimação. Pode-se perceber que a regra empírica anterior permanece válida, mantendo o erro de estimação menor que 10%.

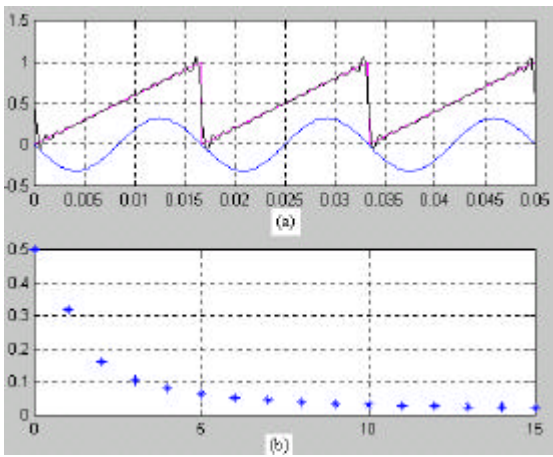


Fig. 3 – (a) forma de onda dente de serra, fundamental na frequência de 60 Hz e o somatório das componentes. (b) Espectro de amplitude para 15 harmônicas.

Foram feitas várias outras simulações com diferentes formas de onda e constatou-se que os resultados obtidos com a regra estabelecida, mantiveram-se consistentes.

A título ilustrativo, os tempos de execução do algoritmo implementado em um Pentium 166 MHz. São mostrados nas figuras 4 e 5. Na figura 4 é fixado o número de harmônicas em 11 e variado o número de amostras por ciclo, para uma dada forma de onda. Nota-se que o tempo de cálculo é proporcional ao número de amostras. Na figura 5, a quantidade de amostras é fixada em 2000 enquanto que o número de harmônicas é variado. Neste caso o tempo de execução é uma função exponencial do número de componentes harmônicas. Isto limita fortemente a aplicação do algoritmo no ambiente do Matlab, para a estimação de uma grande quantidade de componentes harmônicas. Uma forma de contornar facilmente esta limitação consiste em processar os coeficientes em blocos de, digamos 20 harmônicas, até o valor desejado.

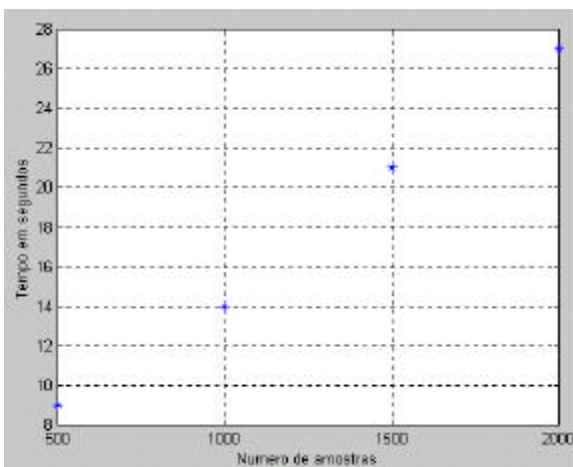


Fig. 4 – Tempo de execução do cálculo dos coeficientes para 11 harmônicas

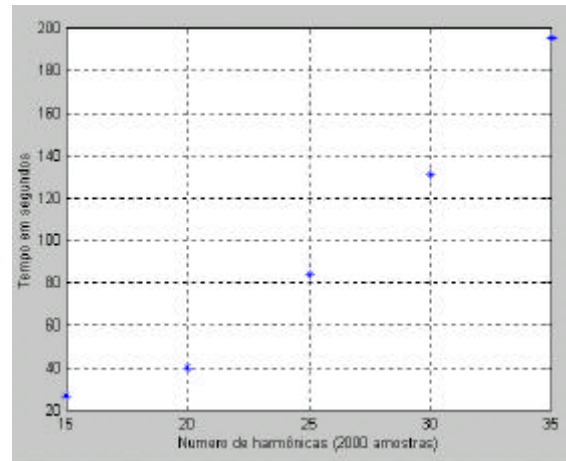


Fig. 5 – Tempo de execução do cálculo dos coeficientes para 2000 amostras

O algoritmo foi também aplicado na análise de uma forma de onda de corrente, c.f. figura 6a, obtida de um ensaio com um motor de indução alimentado com uma forma de onda PWM. Na figura 6 é apresentada a forma de onda de corrente do motor, a fundamental estimada com o algoritmo e a forma de onda resultante da síntese utilizando 35 componentes harmônicas, incluindo o valor médio estimado pelo algoritmo. A frequência de amostragem é de 2115,06Hz e a frequência de referência da corrente é de 15Hz. A forma de onda apresentada possui 141 amostras por ciclo, portanto serão estimadas 35 harmônicas com erro inferior a 10%. A forma de onda de corrente é imposta ao motor por um regulador de corrente do tipo PI, cuja amplitude de referência é de 0,12 A. Todos os filtros foram retirados e o período de amostragem foi estendido para salientar o erro de corrente. A figura 6b mostra o espectro de amplitudes, cujos harmônicos são múltiplos de 15 Hz. Pode se observar destes resultados que o algoritmo é eficiente na estimação das componentes harmônicas de um sinal experimental.

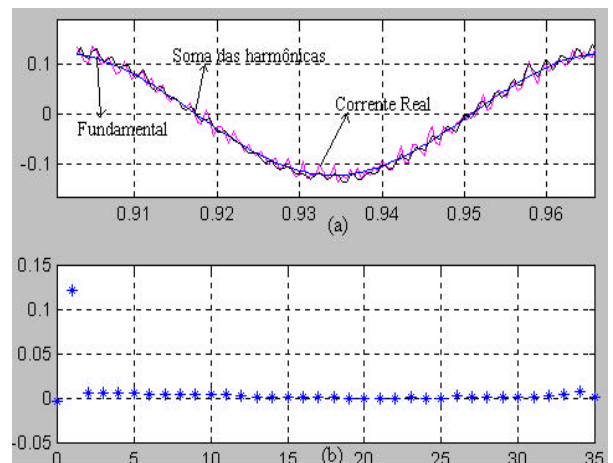


Fig. 6 –(a)Forma de onda da corrente de um motor de indução alimentado com tensões PWM, sua fundamental e a série com 35 harmônicas. (b) Espectro correspondente

## CONCLUSÕES

Dos resultados obtidos, infere-se que o algoritmo proposto atende ao objetivo da estimação adaptativa dos coeficientes da série de Fourier. Em todos os problemas, os dados de entrada para o algoritmo estavam previamente armazenados em arquivos e continham pelo menos um período da forma de onda a ser analisada. A estrutura deste algoritmo permite que o mesmo seja utilizado seqüencialmente, tornando-o atrativo para aplicações em tempo real.

## REFERÊNCIAS

[1] E. O. Brigham (1974) “*The Fast Fourier Transform*”. Prentice-Hall.

[2] A. G. Phadke and J. S. Torp (1988). “*Computer Relaying for Power Systems*” Hardcover. editora

[3] B. P. Lathi (1968) “*An Introduction to Random Signals and Communication Theory*” International Textbook Company.

[4] A. M. N. Lima, C. B. Jacobina and E. B. de Souza Filho (1997). “Nonlinear Parameter Estimation of Steady-State Induction Machine Models”, *IEEE Transaction on Industrial Electronics Society*. June, Vol. 44, No. 3, pp.390-397.

[5] D. Graup (1972) “*Identification of Systems*” Van Nostrand Reinhold, New York.

## ANEXO

Tabela 1. Erros relativo no cálculo de harmônicas, em função do número de amostras utilizado.

Amostras	Harmônicas da forma de onda f(t) (equação 16)							
	1	2	3	4	5	6	7	8
9	5.9%	2.4%	9.9%		**	**	**	**
13	4.2%	1.4%	7.3%	9.9%	**	**	**	**
17	3.3%	1.2%	5.8%	5.3%	**	**	**	**
33	1.7%	0.7%	3.2%	0.35%	**	**	**	9.2%
61	0.93%	0.4%	1.7%	0.33%	**	**	**	4.8%

Tabela 2. Erro na estimação dos coeficientes das componentes harmônicas.

Amostra por período	Harmônicas da dente de serra /(erro %)														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
9	0.22	1.57	6.22												
13	0.21	1.11	3.5	8.3											
21	0.19	0.38	1.9	3.7	6.19	9.1									
33	0.1	0.28	0.94	1.8	2.9	4.3	5.8	7.8	10.6						
61	0.03	0.18	0.28	0.5	0.94	1.4	1.83	2.53	3.2	3.98	4.7	5.9	6.84	8.2	9.3